Moderne Wirtschaftsbücher

Bodo Runzheimer

Operations Research I

Lineare Planungsrechnung und Netzplantechnik

Second Edition

Runzheimer · Operations Research I

Moderne Wirtschaftsbücher

Herausgegeben von Prof. Dr. Eduard Mändle

Prof. Dr. Bodo Runzheimer

Operations Research I

Lineare Planungsrechnung und Netzplantechnik

2., überarbeitete und erweiterte Auflage

SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN GMBH

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Runzheimer, Bodo:
Operations Research / Bodo Runzheimer. –
Wiesbaden: Gabler
(Moderne Wirtschaftsbücher: 1, Betriebs-
wirtschaftl. Grundlagen; 5)

NE: Moderne Wirtschaftsbücher / 01

1. – Runzheimer, Bodo: Lineare Planungs-
rechnung und Netzplantechnik

Runzheimer, Bodo:
Lineare Planungsrechnung und Netzplan-
technik / Bodo Runzheimer. – 2., überarb.
u. erw. Aufl.
(Operations Research / Bodo Runzheimer; 1)
(Moderne Wirtschaftsbücher: 1, Betriebs-
wirtschaftl. Grundlagen; 5)
ISBN 978-3-409-30712-3

NE: Moderne Wirtschaftsbücher / 01

1. Auflage 1978

Ursprünglich erschienen bei Betriebswirtschaftlicher Verlag, Dr. Th. Gabler GmbH, Wiesbaden 1983

Umschlaggestaltung: Horst Koblitz, Wiesbaden
Satz: H. E. Henniger, Wiesbaden

ISBN 978-3-409-30712-3 ISBN 978-3-663-19690-7 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-19690-7

Vorwort zur 1. Auflage

Die *zweibändige* Darstellung des *„Operations Research"* – Band 1: *„Lineare Planungsrechnung und Netzplantechnik"*, Band 2: *„Methoden der Entscheidungsvorbereitung bei Risiko"* – ist aus Vorlesungen, die ich an der *Fachhochschule für Wirtschaft in Pforzheim,* der *Württembergischen Verwaltungs- und Wirtschafts-Akademie* und der *Verwaltungs- und Wirtschafts-Akademie Baden* gehalten habe sowie aus einer Reihe von Kompaktseminaren mit Wirtschaftspraktikern hervorgegangen. Sie wendet sich vornehmlich an *Studierende* der Betriebswirtschaft sowie an *Praktiker* in den Unternehmen, die sich mit dem Einsatz von *Methoden zur Vorbereitung optimaler Entscheidungen auf quantitativer Basis* beschäftigen oder ein Bedürfnis zur Weiterbildung haben.
Dargestellt sind die Grundlagen, Techniken und betriebswirtschaftlichen Anwendungsmöglichkeiten des Operations Research. Die beiden Bände haben einführenden Charakter. Insbesondere habe ich mich bemüht, der Mathematik als Hilfsmittel des Operations Research die ihr zukommende begrenzte Rolle einzuräumen und sie so darzustellen, daß die Bände auch von solchen Lesern leicht gelesen werden können, für die die Mathematik in der Schule nicht gerade Lieblingsfach war oder für die die Schulzeit schon lange zurückliegt. Aus diesem Grunde wurde auch auf die Verwendung der Symbolik der Mengenlehre verzichtet. Das Schwergewicht wurde auf eine Demonstration der Lösungsmethoden an *betriebswirtschaftlichen Problemstellungen* sowie auf deren *ökonomische Interpretation* gelegt. Dazu wird eine Reihe von didaktisch sinnvollen *Beispielen aus der Planungspraxis* verschiedener betriebswirtschaftlicher Funktionsbereiche behandelt. Ein Selbststudium sollte mit den beiden Bänden möglich sein, zumal die notwendigen Grundlagen – die mehr den Charakter von Hilfsmitteln haben – in Form von Exkursen relativ ausführlich erörtert werden (z.B. „Begriffe und Regeln der Matrizenrechnung" bzw. der „Wahrscheinlichkeitsrechnung", „Einführung in Stichprobentheorie", „Grundbegriffe der mehrperiodischen Investitionsrechnung").
Der hier vorliegende erste Band enthält neben einer Einführung die bekanntesten und wohl auch am meisten in der betriebswirtschaftlichen Praxis angewendeten Gebiete des Operations Research, nämlich die *lineare Planungsrechnung* und die *Netzplantechnik.*
Im zweiten Band *„Methoden der Entscheidungsvorbereitung bei Risiko"* wird ganz gezielt nicht von der Prämisse vollständiger Information ausgegangen, sondern versucht, der Tatsache Rechnung zu tragen, daß sich der Entscheidungsträger bei der Suche nach optimalen Lösungen in einer *Risikosituation* befindet, d.h. daß er nur mangelhafte Kenntnisse über die künftige Entwicklung hat. Dabei kann es nicht darum gehen, das Risiko durch raffinierte Methoden aus dem Wege zu räumen. Das

Ziel besteht vielmehr darin, das *Risiko sichtbar* zu machen und es nach Möglichkeit zu *quantifizieren.* Im einzelnen umfaßt der zweite Band Kapitel über die *Simulation, Warteschlangentheorie, Entscheidungsbaumverfahren* und die Behandlung stochastischer Abläufe als *Markov-Prozesse.* Mancher Leser wird das eine oder andere Thema, wie z.B. die Spieltheorie, vermissen. Bei der Auswahl habe ich mich aber nicht zuletzt von dem fortgeschrittenen Entwicklungsstand der Methoden und ihren praktischen Anwendungsmöglichkeiten leiten lassen.
Bei meinem Freund und Kollegen Professor Dr. Fritz Wegner möchte ich mich sehr herzlich für wertvolle Anregungen und Diskussionen bedanken.

Bodo Runzheimer

Vorwort zur 2. Auflage

Auf die beiden Bände "Operations Research I und II" ist eine größere Anzahl positiver Stellungnahmen von Fachkollegen und Praktikern – für die ich sehr dankbar bin – bei mir eingegangen. Dies und die Tatsache, daß rund vier Jahre nach Erscheinen der ersten Auflage eine zweite notwendig ist, zeigen, daß dieses Lehrbuch sowohl im Hochschulunterricht als auch in der Praxis Anerkennung gefunden hat.
Für die zweite Auflage wurde der Aufbau beibehalten. Der Inhalt wurde verbessert und aktualisiert. Es erfolgte eine Erweiterung im 3. Kapitel „Netzplantechnik" um „Vorgangsknotennetze".
Für Anregungen und Kritik bin ich auch weiterhin dankbar.

Bodo Runzheimer

Inhalt

Erstes Kapitel: Einleitung

I. Einige Bemerkungen zur Entwicklung des Operations Research

Operations Research – kurz *OR* – ist relativ jung, so daß nicht viel zu seiner Geschichte zu sagen ist. In England und in den USA wurden mathematische Methoden zur Analyse von kriegsstrategischen Entscheidungen während des Zweiten Weltkriegs eingesetzt. Dabei ging es damals z.B. um die Untersuchung des optimalen Einsatzes von Flugzeugen und Flakgeschützen sowie die optimale Zusammenstellung von Geleitzügen. Zu dieser Zeit wurde auch der Begriff *Operations Research* bzw. *Operational Research* geprägt. Als Zeitraum der Entstehung dieser Disziplin gilt die Zeit ab 1940, obwohl es eine Reihe von Vorläufern des Operations Research gibt (*Müller-Merbach, H.*, 1973, S. 10).

Nach dem Zweiten Weltkrieg fanden die mathematischen Planungsmethoden auch auf privatwirtschaftliche Probleme Anwendung. 1952 wurde in den USA die *„Operations Research Society of America" (ORSA)* gegründet. Es folgten 1954 in England die *„Operational Research Society" (ORS)*, 1956 in Frankreich die *„Société Française de Recherche Opérationelle"(SOFRO)* und in der BRD 1957 der *„Arbeitskreis Operational Research" (AKOR)* und 1971 die *„Deutsche Gesellschaft für Operations Research" (DGOR)*. Ferner gibt es in den meisten Industrieländern nationale Vereinigungen der an OR interessierten Kreise. 1958 vereinigten sich die nationalen OR-Gesellschaften in der *„International Federation of Operational Research Societies" (IFORS)*. Von den OR-Gesellschaften wird eine Reihe von Fachzeitschriften herausgegeben (z.B. Zeitschrift für Operations Research seit 1972, Ablauf- und Planungsforschung (1959–1971), Unternehmensforschung (1956–1971), Operational Research Quarterly (England seit 1950), Operations Research (USA seit 1952), Revue Française de Recherche Opérationelle (Frankreich seit 1956).

Für den Begriff *Operations Research* sind eine Reihe von deutschen Übersetzungen vorgeschlagen worden, wie z.B. Ablaufforschung, Entscheidungsforschung, Operationsforschung, Optimalplanung, Unternehmensforschung, Verfahrensforschung. Bisher hat jedoch keiner von den deutschen Namen eine hinreichend breite Anerkennung gefunden, so daß immer mehr die angloamerikanische Bezeichnung *Operations Research* beibehalten wird.

Man kann heute feststellen, daß die Methoden des Operations Research in der Theorie – von Ausnahmen abgesehen – genügend weit entwickelt sind. Ihre Anwendung in der Praxis ist aber immer noch als unzureichend anzusehen (*Stahlknecht, P.*, 1970, S. 2, *Müller-Merbach, H.*, 1976).

II. Begriff Operations Research

Die Vorstellungen darüber, was Operations Research ist, gehen noch immer weit auseinander. Bei einem Wettbewerb der Operational Research Society über eine neue Definition von Operations Research, zu dem rund 60 Vorschläge eingingen (*Müller-Merbach, H.*, 1976, S. 140 f.), wurde mehrheitlich die folgende *Definition* als besonders charakteristisch ausgewählt (übersetzt):

Unter Operations Research versteht man die Anwendung von wissenschaftlichen Erkenntnissen auf das Problem der Entscheidungsfindung in der Unsicherheits- oder Risikosituation, mit dem Ziel, den Entscheidungsträgern bei der Suche nach optimalen Lösungen eine quantitative Basis zu liefern. Dabei können grundsätzlich Erkenntnisse aus allen wissenschaftlichen Disziplinen herangezogen werden.

An Hand dieser Definition lassen sich folgende wesentliche Begriffsmerkmale des OR ableiten:

(1) Ansatzpunkte für Operations Research bilden *Entscheidungsprobleme*, für die Lösungen gesucht werden. Mit OR sollen Entscheidungen vorbereitet werden (*Entscheidungsvorbereitung*). OR steht damit im Dienste aller Entscheidungsträger in Wirtschaft und Verwaltung.

(2) Es werden *optimale Lösungen* angestrebt. Die Entscheidungsvorbereitung kann in der Erarbeitung *einer* optimalen Lösung bestehen, wenn eindeutige Ziele (operational formulierte Ziele) vorliegen und die Entscheidungssituation vollständig quantitativ erfaßbar ist. Üblicherweise geht es bei der Entscheidungsvorbereitung um die Untersuchung und den Vergleich von *alternativen Entscheidungen, alternativen Strategien* oder *alternativen Systementwürfen.*

(Der Begriff „*optimal*" („beste") bedarf in jedem Fall einer genaueren Definition des konkreten Optimierungszieles, das eine Maximierung oder eine Minimierung beinhalten kann. Der Begriff Optimum wird in der Literatur oft falsch gebraucht, wenn z.B. von „optimalen" Kosten die Rede ist, sind die „minimalen" Kosten gemeint. Der Begriff „optimal" setzt eine nicht genannte Größe (Zielfunktion) voraus, die einen *extremen Wert* annimmt. Man spricht von einem optimalen Absatz- oder Produktionsprogramm, wenn z.B. der Dekkungsbeitrag maximiert werden soll. Oder man spricht von einem optimalen Transportprogramm, wenn z.B. die Kosten minimiert werden sollen. In Zusammenhang mit dem Begriff „optimal" wird also die zu extremierende Größe nicht genannt, während sie in Zusammenhang mit den Begriffen „maximal" oder „minimal" immer genannt wird.)

(3) Die Entscheidungsvorbereitung soll eine *quantitative* Basis liefern. Dies setzt voraus, daß die *Daten*, die in das OR-Modell eingehen, *quantifizierbar* und hinreichend genau bestimmbar sind. Um das Problem besser verstehen und transparent darstellen zu können, wird im allgemeinen versucht, das zu lösende Problem als Ausschnitt der Realität in einem (häufig *mathematischen) Modell* abzubilden, d.h. das Problem modellhaft zu strukturieren.

(4) Zur Untersuchung des zur Lösung anstehenden Problems werden grundsätzlich Erkenntnisse aus allen wissenschaftlichen Disziplinen herangezogen, soweit sie zum Verständnis des Problems und zu seiner Lösung beitragen können. OR ist insoweit *interdisziplinär* („Teamwork").

(5) Der Entscheidungsträger befindet sich bei der Suche nach einer optimalen Lösung in einer *Ungewißheits- oder Risikosituation*, d.h. er hat nur mangelhafte Kenntnisse über die künftige Entwicklung.(OR geht also nicht von der Prämisse der vollständigen Information aus).

III. Typische Vorgehensweise des Operations Research

Die typische Vorgehensweise des Operations Research bei der Lösung realer Probleme ergibt sich aus dem Begriff OR und läßt sich nach *F. Hanssmann* (1974, S. 5 ff) in neun Schritten beschreiben:

1. Schritt:
Allgemeine Erörterung des Entscheidungsproblems; dabei ist u.a. der Entscheidungsspielraum (der durch entsprechende „Restriktionen" der Variablen gegeben ist) abzustecken (*Vertrautmachen mit dem Entscheidungsproblem*).

2. Schritt:
Sammlung und Auswahl der *Entscheidungskriterien.* Die Entscheidungskriterien ergeben sich aus einer Konkretisierung (Operationalisierung) des angestrebten Zieles. Je nach Sachlage können Gewinn, Kosten, Marktanteile, Fertigungszeiten etc. quantifizierbare Entscheidungskriterien sein.

3. Schritt:
Formulierung der möglichen *Umweltbedingungen* (insbesondere der *charakteristischen Umweltparameter* mit den möglichen Werten, die sie annehmen können). Eine vollständige Formulierung der möglichen Umweltbedingungen ist im allgemeinen nicht möglich (die notwendige Bewertung ist ein schwieriges Problem).

4. Schritt:
Formulierung von Handlungsmöglichkeiten (*Entscheidungsalternativen*).

5. Schritt:
Formulierung eines (mathematischen) *Modells,* d.h. Darstellung der funktionalen Zusammenhänge zwischen Entscheidungsalternativen und Umweltfaktoren einerseits sowie dem Entscheidungsergebnis, gemessen mit Hilfe der Entscheidungskriterien, andererseits.

6. Schritt:
Prognose der *Werte*, die die *Umweltparameter* annehmen können (Prognose der Entwicklung des *Datenrahmens*). Voraussagen können im allgemeinen *nicht mit Sicherheit* erfolgen.

7. Schritt:
Untersuchungen am Modell. Darstellung der Auswirkungen der verschiedenen Handlungsalternativen auf die Werte der Entscheidungskriterien unter Berücksichtigung der Prognosewerte für die Umweltparameter. Angesichts der bestehenden Unsicherheiten, die sich nicht völlig eliminieren lassen, wird ausdrücklich anerkannt, daß es eine strenge Vorausberechnung von Entscheidungsergebnissen nicht gibt.

8. Schritt:
Berichterstattung gegenüber den Entscheidungsträgern und Diskussion der Ergebnisse als quantitative Basis für die Wahl einer der Entscheidungsalternativen. Gegebenenfalls sind einige der vorhergehenden Schritte zu wiederholen.

9. Schritt:
Da sich die Untersuchungen am Modell auf quantitative Beziehungen beschränken, müssen die nichtquantifizierbaren relevanten Tatbestände (sog. Imponderabilien) vom Entscheidungsträger bei der Entscheidung noch angemessen berücksichtigt werden.

Operations Research ist zwar ohne mathematische Modelle und Verfahren nicht denkbar. Andererseits spielt die *Mathematik als Hilfsmittel* des Operations Research nur eine begrenzte Rolle in dem für OR charakteristischen Prozeß der Entscheidungsvorbereitung. Die *mathematischen Entscheidungsmodelle* weisen Vorzüge auf, die mit der *Klarheit* und *Präzision* der besonderen Sprache der Mathematik (*Formalsprache*) zusammenhängen. Die Entscheidungsvorbereitung mit Hilfe des Operations Research unterstellt, daß *rationale* Entscheidungen angestrebt werden. Die Mathematik, als Teildisziplin der Logik, ist in dieser Beziehung als Hilfsmittel auch prädestiniert, da sie die Gesetze der Logik formalisiert. Die Formulierung des *ökonomischen Prinzips* verlangt geradezu nach der Anwendung einer Formalsprache wie der Mathematik. Sollen die Untersuchungen am Modell durch EDV-Anlagen unterstützt werden, so sind die genannten Eigenschaften eines Modells: Klarheit, Präzision und Rationalität unabdingbar.

IV. Modelle als Hilfsmittel des Operations Research

Eine detaillierte umfassende Beschreibung der betrieblichen Wirklichkeit (und damit auch des betrieblichen Entscheidungsprozesses) mit all ihren Ursachen und Wirkungszusammenhängen ist nicht möglich. Die betriebliche Wirklichkeit ist – so wie sie uns gegenübertritt – viel zu komplex, als daß wir sie in ihrer Fülle in allen Einzelheiten erfassen könnten. Man muß sich deshalb gewissermaßen eines Kunstgriffs – des Modells – bedienen, um zu einer näherungsweisen Vorstellung von der Wirklichkeit zu kommen. Durch Abstraktion und Vereinfachung wird versucht, das Realproblem möglichst weitgehend strukturgleich als Formalproblem in einem *Mo-*

dell abzubilden. Unter Struktur wird dabei die Gesamtheit der Eigenschaften und Relationen des Ausschnitts aus der Wirklichkeit verstanden. Das ist nicht gleichbedeutend mit dem Versuch, die volle Realität in dem Modell einfangen zu wollen. Völlig strukturgleich kann die Abbildung der Wirklichkeit nicht sein. Diese Aufgabe könnte kein Modell erfüllen. Das Ziel einer Modellbildung, nämlich die sehr komplexe Wirklichkeit erfaßbar und durchschaubar zu machen, müßte untergehen. Die Realitätsnähe eines Modells hat also ihre Grenzen. Sie liegen dort, wo das Modell seine Durchschaubarkeit verliert. Im Modell müssen also die für den jeweiligen Erkenntniszweck wesentlichen Eigenschaften und Relationen des Problems wiedergegeben werden.

Modelle sind also gedankliche Hilfsmittel – gewonnen durch Vereinfachung (Abstraktion) – zur übersichtlichen Darstellung von unanschaulichen Objekten und komplexen Vorgängen (*Bonhoeffer, K. F.*, 1948, S. 3 ff.). Das Modell ist lediglich eine Approximation der Wirklichkeit.

Für die Darstellung der Teilzusammenhänge stehen verschiedene Formen und Mittel der Abbildung zur Verfügung:

(1) Die anschaulichste Form stellt das *physische* oder *ikonische Modell* dar. Beispiele sind körperliche Nachbildungen – Holz-, Plastik- oder Gipsmodell eines Baukörpers oder Stadtteils –, Landkarten, Konstruktionszeichnungen. Innerhalb der Wirtschaftswissenschaften haben physische Modelle praktisch keine Bedeutung erlangt.

(2) Die *symbolischen (sprachlichen) Modelle* sind für die Wirtschaftswissenschaft besonders wichtig. Mit Hilfe einer *Sprache* mit ihrem System symbolischer Zeichen und dem zugehörigen System syntaktischer und semantischer Regeln wird die Struktur des zu untersuchenden Tatbestandes approximiert und in ihrer Problematik untersucht. Dient als Sprache die übliche Alltagssprache (oder eine daraus entwickelte Fachsprache), so handelt es sich um ein *verbales Modell.* Künstliche Sprachen, wie logistische und mathematische Systeme, werden Kalküle genannt; Modelle, in denen sie zur Anwendung gelangen, werden Kalkülmodelle (KOSIOL) oder auch *symbolische Modelle* genannt.

Die Symbolmodelle sind also *mathematische* (oder auch logistische) *Modelle.*

Ein anderer wichtiger Gliederungsgesichtspunkt ist die *Funktion,* die die mathematischen Modelle erfüllen sollen. So kann man in Anlehnung an die Stufenfolge eines wissenschaftlichen Erkenntnis- und Anwendungsprozesses (schlagwortartig: Erklären, Beweisen, Anwenden) unterscheiden zwischen:

(1) Erklärungsmodellen;
(2) Falsifizierungsmodellen;
(3) Entscheidungsmodellen.

Diese drei Modelltypen unterscheiden sich nicht in ihrem strukturellen Aufbau, sondern lediglich durch die Verschiedenartigkeit der bei der Formulierung des Modellansatzes verwendeten Daten (*Angermann, A.*, 1963, S. 15 ff.). Das Erklärungsmodell verwendet keine empirischen, sondern angenommene (hypothetische) Daten. Im Falsifizierungsmodell kommen reale (empirische) Daten zum Zuge. Derartige Modellkonstruktionen werden in der Absicht vorgenommen, die in einem Erklärungsmodell gemachten Aussagen durch eine quantitative Auswertung des betrieb-

lichen Geschehens zu erhärten, Gesetzmäßigkeiten aufzusuchen und sie auf die Zukunft zu übertragen (Prognosemodelle). Dem Falsifizierungsmodell ist als Instrument der Überprüfung auch eine revidierende Funktion übertragen. Im *Operations Research* hat man es ganz überwiegend mit *mathematisch formulierten Entscheidungsmodellen* zu tun. Die *Daten*, die in einem *Entscheidungsmodell* verarbeitet werden, sind *geplante und prognostizierte Größen*. Erfahrungsgemäß wird ein Entscheidungsmodell oft aus einem nicht empirisch erhärteten Erklärungsmodell abgeleitet. Die Überprüfung erfolgt dann gewissermaßen nachträglich durch eine Soll—Ist—Abweichungsanalyse. Da Planung ohne Kontrolle sinnlos ist, folgt auf die Entscheidungsphase eine Kontrollphase, in der ein Kontrollmodell (die geplanten und prognostizierten Daten des Entscheidungsmodells werden mit den erhobenen Istdaten des modellmäßig erfaßten Betriebsgeschehens verglichen) zur Anwendung gelangen kann.

Für den Einsatz von EDV zur Behandlung von Entscheidungsmodellen (zur Lösung von Optimierungsproblemen) kommt den *Standardprogrammen* (Bibliotheksprogrammen) eine große Bedeutung zu. Die wichtigsten Algorithmen, für die Standardprogramme vorliegen, sind die Simplexmethode, Methoden zur Lösung linearer Gleichungssysteme und zur Inversion von Matrizen, Methoden zur Lösung des Transport- und Zuordnungsproblems, Entscheidungsbaumverfahren und verschiedene Verfahren der Netzplantechnik.

Übungsfragen zum 1. Kapitel

1. Welches sind die wesentlichen Begriffsmerkmale des OR?
2. In welche Schritte läßt sich die typische Vorgehensweise des OR bei der Lösung realer Probleme gliedern?
3. Welche Funktion kommt der Mathematik im Rahmen des OR zu?
4. Warum bedient man sich der Modelle als Hilfsmittel des OR?
5. Wie lassen sich die Modelle klassifizieren?
6. Worin unterscheiden sich die Erklärungs-, Falsifizierungs- und Entscheidungsmodelle?
7. Was ist ein mathematisches Entscheidungsmodell?
8. Warum läßt sich die volle Realität eines Entscheidungsproblems niemals in einem Modell einfangen? Welche Probleme ergeben sich daraus?

Literatur zum 1. Kapitel

Bonhoeffer, K. F.: Über physikalisch-chemische Modelle von Lebensvorgängen, Berlin 1948.
Kosiol, E.: Modellanalyse als Grundlage unternehmerischer Entscheidungen, in: Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung, 1961, S. 318 ff.
Vazsonyi, A.: Die Planungsrechnung in Wirtschaft und Industrie (deutsche Übersetzung), Wien und München 1962.
Angermann, A.: Entscheidungsmodelle, Frankfurt/M. 1963.
Henn, R., Künzi, H. P.: Einführung in die Unternehmensforschung I, Berlin 1968.
Münstermann, H.: Unternehmensrechnung, Wiesbaden 1969.
Ackoff, R. L., Sasieni, M. W.: Operations Research, Grundzüge der Operationsforschung (deutsche Übersetzung), Stuttgart 1970.
Stahlknecht, P.: Operations Research, 2. Aufl., Braunschweig 1970.

Hanssmann, F.: Unternehmensforschung – Hilfsmittel moderner Unternehmensführung, Wiesbaden 1971.
Churchman, C. W. u.a.: Operations Research, Eine Einführung in die Unternehmensforschung (deutsche Übersetzung), 5. Aufl., Wien 1971.
Zimmermann, H.-J.: Einführung in die Grundlagen des Operations Research, München 1971.
Lazak, D.: Arbeitshandbuch zur Systemanalyse und exakten Unternehmensoptimierung, München 1973.
Müller-Merbach, H.: Operations *Research,* Methoden und Modelle der Optimalplanung, 3. Aufl., München 1973.
Bamberg, G., Coenenberg, A. G.: Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre, München 1974.
Gößler, R.: Operations-Research-Praxis – Einsatzformen und Ergebnisse, Wiesbaden 1974.
Hanssmann, F.: Operations Research Techniques for Capital Investment, 2. Aufl., New York 1974.
Sturm, S.: Operations Research, Stuttgart 1975.
Müller-Merbach, H.: Operations Research in der betrieblichen Bewährung, in: VWI (Zeitschrift des Verbandes Deutscher Wirtschaftsingenieure e.V.), H. 1, Berlin 1976, S. 140–166.
Mag, W.: Entscheidung und Information, München 1977.
Hanssmann, F.: Einführung in die Systemforschung, München und Wien 1978.
Bitz, M.: Entscheidungstheorie, München 1981.
Kahle, E.: Betriebliche Entscheidungen, München und Wien 1981.
Hammer, R. M.: Unternehmensplanung, München und Wien 1982.
Hanssmann, F.: Quantitative Betriebswirtschaftslehre, München und Wien 1982.
Korndörfer, W.: Unternehmensführungslehre, 3. A., Wiesbaden 1983.

Zweites Kapitel: Lineare Planungsrechnung

I. Einführung

Die *lineare Programmierung* bzw. *lineare Optimierung* oder *lineare Planungsrechnung* (die Begriffe werden synonym verwendet) ist ein Spezialfall der *mathematischen Optimierung*. Sie beruht auf der Prämisse, daß sich die *Zielsetzung* und alle *Nebenbedingungen* der Optimierung durch *lineare Funktionen* erfassen lassen.
Im Zuge der Entscheidung durch betriebliche Entscheidungsträger fallen auch solche *Planungsprobleme* an, die eine *lineare Struktur* besitzen – oder sich durch unerhebliche Veränderungen in eine lineare Struktur überführen lassen.
Trotz der sehr einschränkenden Annahme kommt den *linearen Entscheidungsmodellen* eine zentrale Bedeutung in der Praxis zu; zeigen sie doch eine Reihe der grundlegenden Probleme auf, denen sich der Entscheidungsträger beim Planungsprozeß gegenübergestellt sieht. Darüber hinaus liegt ein großer Vorteil der linearen Optimierung darin, daß sie *exakte Lösungen* ermöglicht.
Die lineare Optimierung ist zusammen mit der Netzplantechnik das bisher bekannteste und wohl auch am meisten angewendete Gebiet des Operations Research. Die lineare Programmierung geht im wesentlichen auf den Amerikaner *G. B. Dantzig* zurück (1951; weitere Pioniere zählt *Müller-Merbach, H.*, 1973, S. 89 auf). Er entwickelte in den vierziger Jahren den Simplex-Algorithmus (1947), der als Lösungsverfahren bei der Planung der verschiedenen Aufgaben der amerikanischen Luftwaffe verwendet werden sollte. Der Simplex-Algorithmus ist auch heute noch das bei weitem wichtigste Verfahren zur Lösung linearer Optimierungsmodelle. So lagen die ersten Anwendungen der linearen Planungsrechnung auf militärischem Gebiet. Es folgten dann die ersten Versuche, die lineare Optimierung für Zwecke der Unternehmensplanung einzusetzen. Man erkannte, daß hier eine ganze Anzahl von Problemen mit Hilfe der linearen Planungsrechnung gelöst werden kann. Ihre praktische Anwendbarkeit erreichte die lineare Planungsrechnung erst durch die Entwicklung wirksamer elektronischer Rechenanlagen.

II. Formulierung der Grundaufgabe der linearen Planungsrechnung

Der mathematische Kern der linearen Optimierung ist einfach zu beschreiben. Es handelt sich um die Aufgabenstellung, eine lineare Zielfunktion (Funktion von

Variablen) zu maximieren (*Maximierungsaufgabe*) oder zu minimieren (*Minimierungsaufgabe*), wobei die Variablen einem *System linearer Gleichungen bzw. Ungleichungen (lineare Nebenbedingungen)* genügen müssen. Außerdem dürfen die Variablen *nicht negativ* sein (*Nichtnegativitätsbedingung*). Materiell geht es bei der linearen Optimierung um die optimale Aufteilung knapper Güter auf konkurrierende Verwendungszwecke bzw. um die optimale Zusammenstellung von Güterkombinationen zur Erfüllung vorgegebener Zwecke (ökonomisches Prinzip).

Zwei typische Beispiele mit Standardansatz
Im folgenden werden zwei typische – gegenüber der Wirklichkeit jedoch stark vereinfachte – Entscheidungssituationen als Demonstrationsbeispiele behandelt.

A. Maximierungsaufgabe: Optimierung eines Produktionsprogramms

Ein Unternehmen kann in sein Produktionsprogramm n verschiedene Produktarten aufnehmen. Jedes Produkt beansprucht zur Herstellung die m knappen Produktionsfaktoren (Betriebsmittel, Materialien etc.). Die Kapazitäten dieser Produktionsfaktoren b_i (i = 1, 2, . . . , m) seien in der Planungsperiode konstant. Es handelt sich um eine *kurzfristige Planung* („short-run"-Betrachtung), da die in der Planung zu betrachtenden Kapazitäten als konstant („gegeben"), d.h. als innerhalb der Planungsperiode nicht beeinflußbar, unterstellt werden.
Der Verbrauch an Produktionsfaktoren für die Fertigung je einer Mengeneinheit der Produktarten wird als *technischer Koeffizient* a_{ij} (i = 1, 2, . . . , m und j = 1, 2, . . . , n) bezeichnet. Die a_{ij}-Werte geben also die erforderlichen Mengeneinheiten an Produktionsfaktoren der i-ten Gruppe für die Fertigung *einer* Mengeneinheit der Produktart j an.
Das Unternehmen ist für die Planperiode an dem *optimalen Produktionsprogramm* interessiert, d.h. an derjenigen *Auswahl der Art und Mengen* der *zu fertigenden Produkte* x_j (j = 1, 2, . . . , n), die den *Periodengewinn G maximiert*. Da die Höhe der fixen Kosten keinen Einfluß auf die Lage des Gewinnmaximums hat, ist das Programm mit dem maximalen *Periodendeckungsbeitrag* identisch mit dem des maximalen Periodengewinns. Der Deckungsbeitrag g_j (j = 1, 2, . . . , n) pro Mengeneinheit des j-ten Produktes ist die Differenz zwischen dem Stückerlös (Marktpreis) p_j und den variablen Stückkosten k_j (j = 1, 2, . . . , n).
Die gestellte Aufgabe läßt sich leicht lösen, wenn *nur ein Engpaß* existiert. In diesem Fall konkurrieren die Produkte um diese Engpaßkapazität. Die Reihenfolge der Förderungswürdigkeit der konkurrierenden Produkte ergibt sich dann aus ihren *relativen Deckungsbeiträgen* (*P. Riebel*, 1981), d. h. aus den Deckungsbeiträgen, die sie je Mengeneinheit der Engpaßkapazität aufweisen.
Konkurrieren die n verschiedenen Produktarten jedoch *gleichzeitig um mehrere Engpaßkapazitäten*, so läßt sich die Aufgabe nur mit Hilfe der *linearen Planungsrechnung* lösen.

1. Beispiel mit linearem Programmansatz

Ein Betrieb produziere zwei Produktarten P_1 und P_2, und zwar x_1 Mengeneinheiten von P_1 und x_2 Mengeneinheiten von P_2. Die Deckungsbeiträge je Mengeneinheit seien $g_1 = 110$ DM für Produktart P_1 und $g_2 = 160$ DM für Produktart P_2. Die zur Fertigung erforderlichen knappen Produktionsfaktorarten (Kapazitäten) werden in drei Gruppen eingeteilt. Die erste Gruppe umfasse alle in der Planperiode verfügbaren Werkstoffe (Roh-, Hilfsstoffe etc.), die zweite die verfügbaren Maschinenstunden und die dritte die verfügbaren Arbeitsstunden. Die Fertigungsingenieure mögen ermittelt haben, daß zur Fertigung von einer Mengeneinheit der Produktart P_1 35 Mengeneinheiten der Produktionsfaktorgruppe 1 ($a_{11} = 35$), 10 Mengeneinheiten der Produktionsfaktorgruppe 2 ($a_{21} = 10$) und 15 Mengeneinheiten der Produktionsfaktorgruppe 3 ($a_{31} = 15$) sowie zur Fertigung von einer Mengeneinheit der Produktart P_2 70 Mengeneinheiten der Produktionsfaktorgruppe 1 ($a_{12} = 70$), 8 Mengeneinheiten der Produktionsfaktorgruppe 2 ($a_{22} = 8$) und 20 Mengeneinheiten der Produktionsfaktorgruppe 3 ($a_{32} = 20$) benötigt werden. Beispielsweise bedeutet $a_{31} = 15$, daß 15 Arbeitsstunden notwendig sind, um eine Mengeneinheit der Produktart P_1 herzustellen.

Die Produktionsfaktoren stehen dem Betrieb in der Planungsperiode nur in beschränktem Umfang zur Verfügung. Wegen fehlender Lagerkapazitäten mögen nur $b_1 = 9.800$ Tonnen Werkstoffe zur Verarbeitung bereitgestellt werden können. Die Maschinenkapazitäten seien fest vorgegeben, so daß in der Planungsperiode höchstens 1.600 Maschinenstunden verfügbar seien. Schließlich seien die verfügbaren Arbeitsstunden wegen Vollbeschäftigung auf 3.000 in der Planperiode begrenzt.

Will der Betrieb seinen Periodenbruttogewinn G (Periodendeckungsbeitrag) maximieren, dann lautet der lineare Programmansatz (das mathematische Modell):

(1) Zielfunktion

Maximiere $G = 110\, x_1 + 160\, x_2$

Die *Entscheidungsvariablen,* d.h. die Variablen, die wertmäßig festgelegt werden sollen, sind die Mengen x_1 bzw. x_2, die das Unternehmen in der Planperiode von P_1 bzw. P_2 fertigen sollte. (Ist x_1 *oder* x_2 gleich Null, so handelt es sich auch um die Auswahl einer Produktart). Die Zielfunktion, die zu maximieren ist, stellt den Zusammenhang zwischen Entscheidungskriterium (Gesamtdeckungsbeitrag, kurz: Gewinn) einerseits und Entscheidungsvariablen andererseits dar.

(2) Nebenbedingungen (Restriktionen)

– Kapazitätsrestriktionen

a) Werkstoffrestriktion: $35x_1 + 70x_2 \leqslant 9.800$

b) Maschinenrestriktion: $10x_1 + 8x_2 \leqslant 1.600$

c) Arbeitskräfterestriktion: $15x_1 + 20x_2 \leqslant 3.000$

– Nichtnegativitätsbedingungen

$x_1 \geqslant 0$ und $x_2 \geqslant 0$

Die Nichtnegativitätsbedingungen sind betriebswirtschaftlich sinnvoll, da es keine negativen Produktionsmengen geben kann.

2. Graphische Lösung

Da das vorliegende Problem nur zwei Entscheidungsvariablen (Unbekannte) aufweist, kann es *graphisch gelöst* werden. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit der x_1-Achse als Abszisse und x_2-Achse als Ordinate repräsentiert jeder Punkt im ersten Quadranten (nur dieser Quadrant kann wegen der Nichtnegativitätsbedingung von Interesse sein) ein bestimmtes Produktionsprogramm. Durch Einzeichnen der linearen Kapazitätsrestriktionen (System linearer Nebenbedingungen) kann der Bereich der *zulässigen Lösungen* (mögliche Produktionsprogramme) abgegrenzt werden. Jede lineare Nebenbedingung läßt sich als Gerade abbilden. Unter der Voraussetzung, daß die einzelnen Kapazitäten voll ausgelastet werden, gilt in den Nebenbedingungen das Gleichheitszeichen. In diesem Fall liegen die zulässigen Lösungen auf der Geraden. Werden die Kapazitäten nicht voll beansprucht, gilt in den Nebenbedingungen das Kleinerzeichen; eine Fläche unterhalb der Begrenzungsgeraden bildet dann den bezüglich der betreffenden Nebenbedingung *zulässigen Lösungsbereich*. Für die Nebenbedingung 2a) $35x_1 + 70x_2 \leqslant 9.800$ ergibt sich z.B. folgender zulässiger Lösungsbereich (schraffierte Fläche einschließlich der Begrenzungsgeraden):

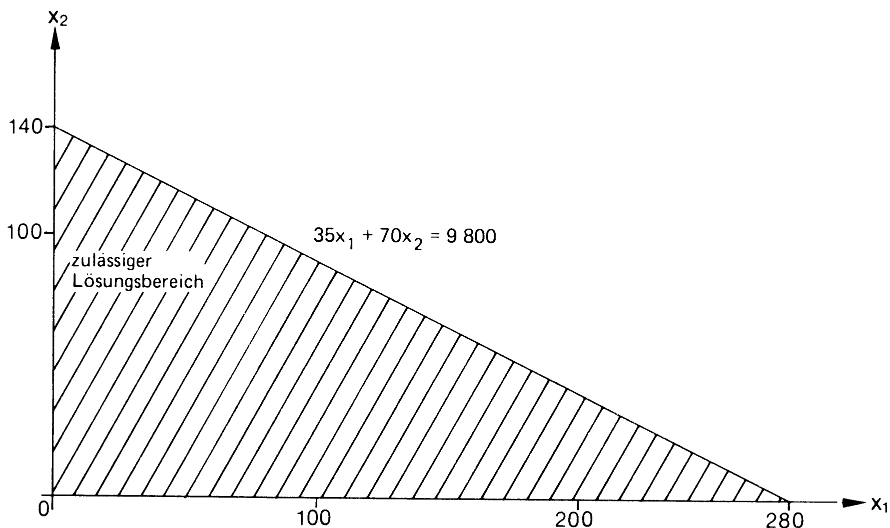


Abb. 1: Zulässige Mengenkombination für die Gruppe 1 der Produktionsfaktoren

Überträgt man *alle Nebenbedingungen* in das Koordinatensystem, so ergibt sich für diesen Fall der zulässige Lösungsbereich als das Innere eines geschlossenen Vielecks mit den Eckpunkten OABCD (sog. konvexen Polyeders) einschließlich Begrenzungsgeraden: Alle Mengenkombinationen von x_1 und x_2, die innerhalb oder auf dem Rand dieser Fläche liegen, sind *zulässige Lösungen* für das gesuchte Produktionsprogramm. Alle anderen Kombinationen verletzen mindestens eine der Nebenbedingungen.

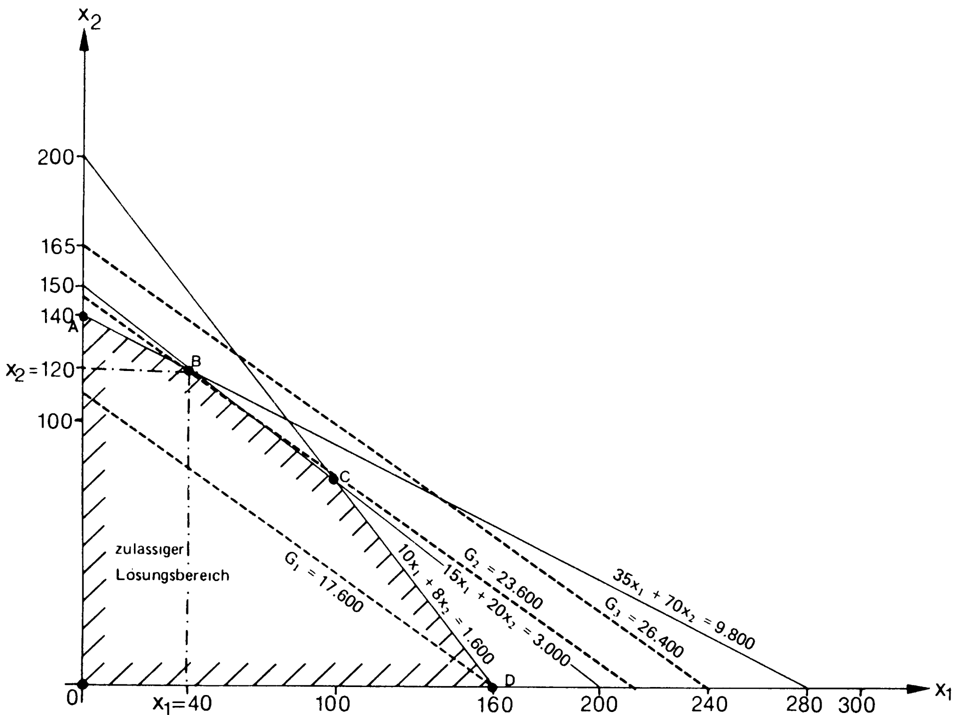


Abb. 2: Graphische Lösung der linearen Maximierungsaufgabe

Aus diesen zulässigen Produktionsprogrammen ist nun dasjenige zu bestimmen, das den *Gewinn G maximiert*. Dazu ist es notwendig, die zulässigen Produktionsprogramme zu bewerten. Setzen wir in der Zielfunktion für G einen festen Wert ein, so erhalten wir die Gleichung für eine Gerade, welche wir ebenfalls in das Koordinatensystem einzeichnen können. Auf dieser Geraden liegen dann alle Produktionsprogramme mit dem gleichen Zielfunktionswert (Iso-Gewinngerade). Wählen wir z.B. als Zielfunktionswert G_1 = 17.600 DM und zeichnen die *Iso-Gewinngerade* (Niveaulinie) in das Koordinatensystem ein, so zeigt sich, daß diese Gewinngerade den zulässigen Lösungsbereich schneidet. Ändern wir den Wert von G, so erhalten wir eine zur ursprünglichen Gewinngeraden parallel verschobene Iso-Gewinngerade. Je größer der für G eingesetzte DM-Betrag ist, um so weiter liegt die Iso-Gewinngerade vom Ursprung entfernt. Setzt man als Zielfunktionswert G_3 = 26.400 DM, so erhält man eine Iso-Gewinngerade, die den zulässigen Lösungsbereich mit den Eckpunkten OABCD weder schneidet noch tangiert; sie liegt außerhalb des zulässigen Bereiches, so daß dieser Gewinn bei den gegebenen Nebenbedingungen nicht realisiert werden kann. Da im *optimalen Lösungspunkt* der *höchstmögliche Gewinn* erzielt wird, muß er auf der *Gewinngeraden* G_k liegen, die *am weitesten* von dem *Koordinatenursprung entfernt* liegt und die mit dem *zulässigen Lösungsbereich mindestens einen Punkt gemeinsam* hat. Durch *Parallelverschiebung der Iso-Gewinngeraden* findet man leicht den *optimalen Lösungspunkt B* mit x_1 = 40 und x_2 = 120 auf der Ge-

winngeraden G_2. Der maximale Deckungsbeitrag beträgt $G_2 = 40 \cdot 110 + 120 \cdot 160 = 23.600$ DM.
Da das Gewinnmaximum ein *Extremwert* ist, können nur *Punkte auf der Peripherie* des zulässigen Lösungsbereiches optimal sein. Auch der Geometrie kann leicht entnommen werden, daß nur *Randpunkte* des zulässigen Bereichs als Optimallösung in Frage kommen. Zu jeder Mengenkombination im Innern des zulässigen Lösungsbereiches läßt sich immer ein ihr überlegener Randpunkt finden. Die Zahl der zunächst unendlich vielen möglichen Punkte des zulässigen Bereichs verringert sich durch das sog. *Eckentheorem* auf eine endliche Zahl von Lösungspunkten, nämlich auf die Zahl der *Eckpunkte.* Das *Eckentheorem* besagt: *Eine optimale Lösung eines linearen Programms muß auf einem der Eckpunkte des zulässigen Bereichs liegen.* Der Begriff Eckpunkt ist dabei über die zwei- bzw. dreidimensionale Anschauung hinaus als Schnittpunkt von Begrenzungsgeraden bzw. -ebenen auch auf den allgemeinen n-dimensionalen Raum zu übertragen. Mit Hilfe der Theorie der konvexen Polyeder läßt sich dieser Zusammenhang beweisen (*Hadley, G.*, 1962, S. 58 ff. und S. 100 ff.). Man bräuchte somit nur alle Eckpunkte auszurechnen und den besten auszuwählen, um das Optimum zu finden.
Nur im sog. *Entartungs- oder Degenerationsfall* kann das Optimum *entlang einer Begrenzungsgeraden* verlaufen. Ein solcher Fall ist gegeben, wenn eine Begrenzungsgerade auf der Iso-Gewinngeraden liegt. Es sind dann *alle Punkte optimal,* die auf der gemeinsamen Strecke des zulässigen Lösungsbereichs liegen. Man spricht von *mehrdeutigen Lösungen (Mehrfachlösungen, Lösungsmannigfaltigkeit).* Da die Eckpunkte dieser gemeinsamen Geraden eingeschlossen sind und zu den optimalen Lösungen gehören, verliert die Behauptung, daß das Optimum immer auf Eckpunkten liegen muß, nicht seine Gültigkeit für den entarteten Fall.

B. Minimierungsaufgabe: Optimierung eines Werbeprogramms

Bei der Werbemittelauswahl geht es u.a. um zwei grundsätzliche Fragestellungen: Einmal kann danach gefragt sein, welche Werbemittelart bei gegebenem Gesamtwerbeaufwand (Werbeetat) den höchsten Werbeertrag erwarten läßt. Zum zweiten geht es um die Frage, mit welcher Werbemittelart ein bestimmter Werbeertrag mit minimalen Kosten erzielt werden kann. Wir betrachten die zweite Fragestellung und gehen dabei von der folgenden relativ einfachen Aufgabenstellung aus.

1. Beispiel mit linearem Programmansatz

Es handle sich um eine Werbekampagne für ein Rasierwasser. Die *Anzahl von Anzeigen* in verschiedenen Zeitschriften sei zu bestimmen. Unserem Ansatz legen wir als *Erfolg der Werbung* die sog. *Aufmerksamkeitswirkung* (Sinneswirkung) zugrunde (*Behrens, K. C.*, 1963, S. 106). Um den Erfolg einer Werbung beurteilen zu können, ist es zweckmäßig, eine Zweiteilung des Erfolges in eine ökonomische und eine außerökonomische Komponente vorzunehmen (z. B. *Huth, R., Pflaum, D.*, 1980,

S. 125 f.). Der *ökonomische Erfolg* (auch kurz als *Werbeerfolg* bezeichnet) findet z. B. im Auftragseingang und in der Umsatzentwicklung seinen Niederschlag. Nur selten gelingt es jedoch, diesen ökonomischen Erfolg einem bestimmten absatzpolitischen Instrument oder gar einem Werbemittel direkt zuzurechnen (Problematik der Zurechenbarkeit bei Vorhandensein eines Wirkungsverbundes) (*Runzheimer, B.*, 1966, S. 102 ff.).

Der zweite Ansatzpunkt für die Beurteilung der Werbemittel bietet der ***außerökonomische Erfolg*** (auch kurz *Werbewirkung* genannt). Dabei wurde bislang zwei Faktoren besondere Bedeutung zugemessen: der ***Aufmerksamkeitswirkung*** und dem *Gedächtniswert der Werbung.* Die Aufmerksamkeitswirkung läßt sich durch Beobachtung und Experiment (Blickregistrierung bei Schaufenstern, Plakaten und Inseraten), oder durch Befragung der umworbenen Personen (telefonische Sofortbefragung bei Werbefernsehen) registrieren. Durch den Wiedererkennungstest (recognition-test) und den Erinnerungstest (recall-test) läßt sich schließlich der Gedächtniswert der Werbung registrieren.

Es wird in unserem Beispiel unterstellt, daß bereits definitive Entscheidungen über Gestaltung, Größe und Plazierung der Anzeigen gefällt wurden, so daß die Anzeigen in dieser Beziehung als qualitativ gleichwertig anzusehen sind. Zur Auswahl der Werbemittel kommen mithin allein ***quantitative Kriterien*** zum Zuge, nämlich die ***Kosten pro Anzeige*** und ***streutechnische Gesichtspunkte***, d.h. die Reichweite der Zeitschriften. Die Zeitschriften, in denen Anzeigen erfolgen sollen (die Werbeträger), seien bereits bestimmt. (Es handle sich dabei um Zeitschriften, die keine externen Überschneidungen aufweisen). Der Einfachheit halber (wegen der graphischen Darstellbarkeit) sollen nur zwei Zeitschriften 1 und 2 zur Diskussion stehen. Die Kosten für eine ***ganzseitige Anzeige*** (1/1 Seite vierfarbig) betragen in Zeitschrift 1 DM 70.000 und in Zeitschrift 2 DM 40.000 (je Anzeige und Auflage). Die Anzahl der in Zeitschrift 1 und 2 aufzugebenden (ganzseitigen) Anzeigen x_1 und x_2 ist unter folgenden Bedingungen zu bestimmen:

(1) die Gesamtkosten K sind zu minimieren;

(2) in der Zeitschrift 1 sollen mindestens vier Anzeigen und

(3) in Zeitschrift 2 mindestens sechs Anzeigen erscheinen;

(4) auf Grund von Mediaanalysen sei festgestellt, daß Zeitschrift 1 von 3 Mio. und Zeitschrift 2 von 2 Mio. männlichen Lesern regelmäßig gelesen und die jeweiligen ganzseitigen Anzeigen wahrgenommen werden (Aufmerksamkeitswirkung). Es wird dabei unterstellt, daß eine in den Zeitschriften mehrfach plazierte Anzeige auch entsprechend mehrfach wahrgenommen wird (linearer Zusammenhang zwischen kumulativer Reichweite und mehrfacher Belegung im Zeitablauf). Gefordert wird, daß die Anzeigen von den männlichen Lesern der beiden Zeitschriften insgesamt mindestens 36 Mio. mal wahrgenommen werden (Aufmerksamkeitswirkung).

(5) Von den durch Mediaanalysen ermittelten 2,4 Mio. männlichen Lesern der Zeitschrift 1, die monatlich mindestens DM 2.000 verdienen bzw. von den 1,0 Mio. männlichen Lesern der Zeitschrift 2, die ebenfalls mindestens DM 2.000 pro Monat verdienen, sollen die Anzeigen insgesamt mindestens 24,0 Mio. mal wahrgenommen werden.

Der *lineare Programmansatz* lautet:

(1) Zielfunktion
Minimiere $K = 70.000 \cdot x_1 + 40.000 \cdot x_2$

(2) Nebenbedingungen:
(a) Mindestanzahl der Anzeigen in Zeitschrift 1: $x_1 \geqslant 4$
(b) Mindestanzahl der Anzeigen in Zeitschrift 2: $x_2 \geqslant 6$
(c) Zielpersonengruppe männliche Leser:
$3.000.000 \cdot x_1 + 2.000.000 \cdot x_2 \geqslant 36.000.000$
(d) Zielpersonengruppe männliche Leser mit Monatseinkommen von mindestens DM 2.000:
$2.400.000 \cdot x_1 + 1.000.000 \cdot x_2 \geqslant 24.000.000$
(e) Ganzzahligkeitsbedingung: da nur ganzseitige Anzeigen geschaltet werden sollen, müssen die Entscheidungsvariablen x_j (j = 1, 2) ganzzahlig sein.

Die normalerweise notwendigen Nichtnegativitätsbedingungen entfallen hier, da die Nebenbedingungen unter (2a) und (2b) diese umschließen.

2. *Graphische Lösung*

Bei der graphischen Behandlung des Problems geht man im Prinzip genauso vor wie bei der Maximierungsaufgabe. Da nun die Zielfunktion zu minimieren ist, ändert sich die Optimierungsrichtung: Gesucht ist der ***Punkt des zulässigen Lösungsbereichs***, der auf der ***am nächsten beim Koordinatenursprung*** verlaufenden ***Iso-Kostengeraden*** liegt.

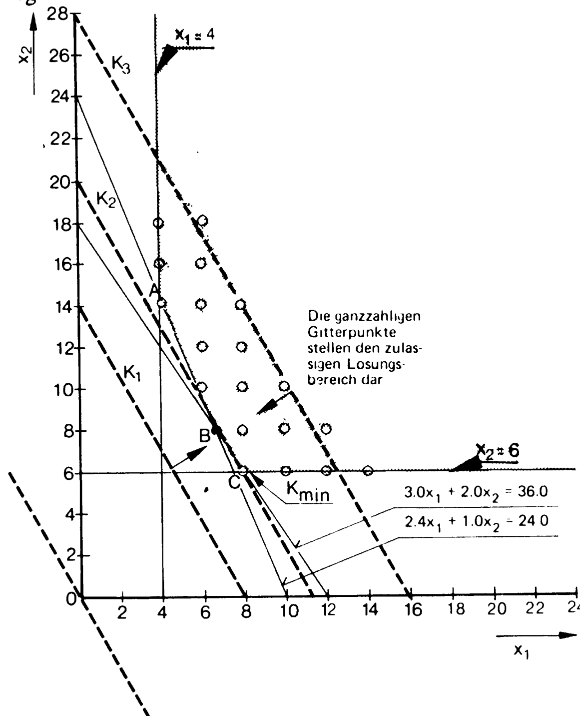


Abb. 3: Graphische Lösung der Minimierungsaufgabe

In dem 1. Quadranten des rechtwinkligen Koordinatensystems mit der x_1-Achse als Abszisse und der x_2-Achse als Ordinate stellt zunächst die Fläche rechts oberhalb der Begrenzungsgeraden mit den Eckpunkten A B C den zulässigen Lösungsbereich dar. Wegen der *Ganzzahligkeitsbedingung* sind jedoch nicht alle Mengenkombinationen von x_1 und x_2 zulässig, sondern nur die mit ganzzahligen x_1- und x_2-Werten (ganzzahlige Gitterpunkte). Man beachte, daß B nicht zu den ganzzahligen Gitterpunkten gehört.
Setzen wir für den Zielfunktionswert K eine feste Größe ein, so erhalten wir die Gleichung für eine *Iso-Kostengerade*, welche wir ebenfalls in das Koordinatensystem einzeichnen können. Wählen wir z.B. als Zielfunktionswert K_1 = 560.000 DM und zeichnen die Iso-Kostengerade in das Koordinatensystem ein, so zeigt sich, daß diese Kostengerade den zulässigen Lösungsbereich weder tangiert noch schneidet; sie liegt also außerhalb des zulässigen Bereichs, so daß die vorgesehene Werbekampagne nicht mit Kosten von K_1 = 560.000 DM realisiert werden kann. Verschiebt man die Iso-Kostenkurve parallel, so tangiert sie erstmals im Punkt C einen zulässigen ganzzahligen Lösungspunkt. Da dies zugleich die Kostengerade mit dem niedrigsten Niveau ist, stellt der Punkt C die optimale Lösung dar, mit $x_1 = 8$, $x_2 = 6$ und $K_2 = 8 \cdot 70.000 + 6 \cdot 40.000 = 800.000$.
Die *minimalen Gesamtkosten* für die Werbekampagne betragen mithin DM 800.000. Dabei sind alle Nebenbedingungen erfüllt. Es werden 8 Anzeigen in Zeitschrift 1 und 6 Anzeigen in Zeitschrift 2 plaziert. Erreicht werden dann 8 · 3 Mio. + 6 · 2 Mio. = 36 Mio. Kontakte bei männlichen Lesern, unter denen sich 8 · 2,4 Mio. + 6 · 1,0 Mio. = 25,2 Mio. mit einem Monatseinkommen von mindestens DM 2.000 befinden.

C. Exkurs: Einige Begriffe und Regeln der Matrizenrechnung

Gleichungs- oder Ungleichungssysteme können einen beträchtlichen Umfang annehmen. Mit Hilfe der *Matrizenschreibweise* und *Matrizenrechnung* läßt sich eine erhebliche Vereinfachung der Darstellung und der notwendigen Umformungen dieser Systeme erreichen. Da im folgenden auch die Matrizenrechnung verwendet wird, sollen deren wesentliche Grundlagen kurz dargestellt werden.

1. Begriff Matrix

Eine *Matrix* $A_{(m,\,n)}$ ist ein rechteckiges Schema mit m Zeilen und n Spalten. In dem Schema sind m · n Elemente a_{ij} wie folgt angeordnet:

$$A_{(m,\,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Für jedes Element a_{ij} ist die Position im Schema wesentlich. Der erste Index $i = 1, 2, \ldots, m$ gibt daher die Zeile (Zeilenindex) und der zweite Index $j = 1, 2, \ldots, n$ die Spalte (Spaltenindex) des Schemas an, in der das betreffende Element sich befindet. Das Element a_{24} steht also in der zweiten Zeile und vierten Spalte der Matrix A. Die Elemente einer Matrix werden durch Klammern zusammengefaßt. Die Matrizen selbst werden mit großen lateinischen Buchstaben $A, B, \ldots$ symbolisiert, die zur Unterscheidung von den gewöhnlichen (reellen) Zahlen – den Skalaren (Skalar ist eine Größe, die allein durch Angabe eines Zahlenwertes charakterisiert ist) – durch Kursive kenntlich gemacht werden. Es ist üblich, die Elemente von Matrizen mit den dem Matrizensymbol entsprechenden Kleinbuchstaben zu bezeichnen.
Die Anzahl der Zeilen m und der Spalten n bestimmt den *Typ* der Matrix. Dabei kann m größer, kleiner oder gleich n sein. Zwei Matrizen A und B sind *typengleich (vom gleichen Typ)*, wenn sie die gleiche Spalten- und Zeilenzahl aufweisen. Zwei Matrizen A und B sind gleich, wenn sie vom gleichen Typ sind und die entsprechenden (positionsgleichen) Elemente gleich sind ($A = B$, wenn $a_{ij} = b_{ij}$ gilt). Eine reelle Zahl kann auch als eine Matrix vom Typ (1,1) aufgefaßt und wie eine gewöhnliche Matrix behandelt werden.
Ist $m = n$, so ist die Matrix vom Typ (m, m) und heißt *quadratische Matrix*. Die Elemente a_{11}, $a_{22}, \ldots, a_{mm}$ einer quadratischen Matrix A bilden die *Hauptdiagonale* von A.
Eine quadratische Matrix, bei der nur die Hauptdiagonale von Null verschiedene Elemente hat, wird *Diagonalmatrix* genannt:

$$D_{(m,m)} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_m \end{pmatrix}$$

Eine *Einheitsmatrix* (auch Einsmatrix genannt) ist eine Diagonalmatrix, die nur Einser enthält.

$$E_{(m,m)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Sind in einer quadratischen Matrix nur die Elemente (rechts) oberhalb bzw. (links) unterhalb der Hauptdiagonalen ungleich Null ($a_{ij} \neq 0$ für $i \leqslant j$ bzw. $i \geqslant j$), so wird sie *obere* bzw. *untere Dreiecksmatrix* genannt.
Sind alle Elemente einer Matrix von beliebigem Typ Null, so heißt sie *Nullmatrix*.
Matrizen vom Typ (1, n) und vom Typ (m, 1) werden *Vektoren* genannt. Ein *Zeilenvektor* ist eine Matrix vom Typ (1, n), mit n in einer Zeile angeordneten Elementen (auch Komponenten genannt). Eine Matrix vom Typ (m, n) besteht aus m solchen Zeilenvektoren. Entsprechend ist ein *Spaltenvektor* eine Matrix vom Typ (m, 1) mit m in einer Spalte angeordneten Elementen (Komponenten). Eine Matrix vom Typ (m, n) besteht aus n solchen Spaltenvektoren. Als Symbole für Spaltenvektoren werden kursive lateinische Kleinbuchstaben $a, b, \ldots$ verwendet. Zeilenvektoren werden durch ein dem Buchstaben beigefügtes Apostroph $a', b', \ldots$ besonders gekennzeichnet.

2. *Addition und Subtraktion von Matrizen*

Zwei Matrizen bzw. Vektoren werden *addiert* (*subtrahiert*), indem positionsgleiche Elemente addiert (subtrahiert) werden. Die Ausführbarkeit dieser Operationen ist also nur für *typengleiche* Matrizen bzw. Vektoren gegeben.

Sind z.B. A und B zwei $2 \cdot 3$-Matrizen, so erhalten wir:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}$$

Allgemein bedeutet für Matrizen A, B mit m Zeilen und n Spalten $A_{(m,\, n)} \pm B_{(m,\, n)} = C_{(m,\, n)}$, daß $a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij}$ (für alle Kombinationen von $i = 1, 2, \ldots, m$ und $j = 1, 2, \ldots, n$).

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (2 \quad 3) - (4 \quad 2) = (-2 \quad 1)$$

Dagegen sind z.B. nicht ausführbar:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}; \qquad (2 \quad 3 \quad 6) + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Für die Addition (Subtraktion) von Matrizen (Vektoren) gilt:
(1) das Kommutativgesetz.

$$A + B = B + A$$
$$A - B = -B + A$$
$$-A + B = B - A$$
$$-A - B = -B - A$$

(2) das Assoziativgesetz:

$$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$$
$$A - (B + C) = (A - B) - C = A - B - C$$

Allgemein besteht die Summe (Differenz) einer Anzahl von Matrizen (Vektoren) des gleichen Typs aus einer Matrix (einem Vektor), deren Elemente jeweils die Summe (Differenz) aller positionsgleichen Elemente darstellen.

3. Multiplikation von Matrizen

a) Vielfaches einer Matrix

Eine Matrix A wird mit einer Zahl (Skalar) p multipliziert, indem jedes Element der Matrix A mit p multipliziert wird. Es gilt also:

$$B = p \cdot A = A \cdot p = \begin{pmatrix} pa_{11} & pa_{12} & \cdots & pa_{1n} \\ pa_{21} & pa_{22} & \cdots & pa_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ pa_{m1} & pa_{m2} & \cdots & pa_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 & 3 \cdot 8 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 24 & 6 \\ 6 & 9 & 18 \end{pmatrix}$$

Umgekehrt gilt natürlich, daß man einen gemeinsamen Faktor sämtlicher Elemente vor diese Matrix setzen kann. Es kann also z.B. geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} 27 & 18 & 9 \\ 36 & 54 & -9 \end{pmatrix} = 9 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Multiplikation von Vektoren

Ist u' ein Zeilenvektor und v ein Spaltenvektor mit jeweils der gleichen Anzahl von Elementen n, so erhalten wir das Produkt

$$u' \cdot v = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \ldots + u_n \cdot v_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Es besteht die Konvention, den Zeilenvektor links und den Spaltenvektor rechts zu schreiben. Bei der Multiplikation eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor erhält man also ein Skalar, d.h. eine einelementige Matrix. Dieses Produkt heißt auch *Skalarprodukt*.

Beispiel:

$$(2 \quad 1 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 = 1$$

c) Matrizen und ihre multiplikative Verbindung mit Vektoren

A sei eine m · n-Matrix, x' sei ein Zeilenvektor mit m Elementen und u sei ein Spaltenvektor mit n Elementen. Die Produkte $x' \cdot A$ und $A \cdot u$ werden wie folgt definiert:

$$x' \cdot A = (x_1 \; x_2 \ldots x_m) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1a_{11} + x_2a_{21} + \ldots + x_ma_{m1} \quad x_1a_{12} + x_2a_{22} + \ldots + x_ma_{m2} \quad \cdots \quad x_1a_{1n} + $$
$$+ x_2a_{2n} + \ldots + x_ma_{mn})$$

$$A \cdot u = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n \quad a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n \ \ldots$$

$$a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \ldots + a_{mn}u_n$$

d) Multiplikation von Matrizen

Ist A eine $m \cdot k$-Matrix und B eine $k \cdot n$-Matrix, so ist das Produkt $C = A \cdot B$ eine $m \cdot n$-Matrix mit den Elementen

$$c_{ij} = (a_{i1} \quad a_{i2} \ldots a_{ik}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} \quad (i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$$

Unter bestimmten Bedingungen können also zwei Matrizen miteinander multipliziert werden, um eine dritte Matrix zu erhalten. Ist z.B. A eine $2 \cdot 3$-Matrix und B eine $3 \cdot 2$-Matrix, so ist $A \cdot B$ eine $2 \cdot 2$-Matrix:

$$A_{(2,3)} \cdot B_{(3,2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$$

$$AB_{(2,2)} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

Jedes Element der neuen Matrix (AB) ist das Skalarprodukt einer Zeile von A und Spalte von B.
Die wesentlichen Punkte der Matrizenmultiplikation sind:

(1) um eine Matrix A (linker Faktor) mit einer Matrix B (rechter Faktor) multiplizieren zu können, muß die Zahl der Spalten von A gleich der Anzahl der Zeilen von B sein;

(2) die Produktmatrix $C = A \cdot B$ hat die gleiche Zeilenzahl wie A und die gleiche Spaltenzahl wie B;

(3) um den Wert der i-ten Zeile und j-ten Spalte von $A \cdot B$ zu erhalten, bildet man das Skalarprodukt der i-ten Zeile von A und der j-ten Spalte von B.

Das Produkt aus Vektor und Matrix ist nur ein Spezialfall der Multiplikation von Matrizen.

Rechenhilfe:
Da bei manueller Berechnung eines Matrizenproduktes die richtige Plazierung der einzelnen Skalarprodukte in der Produktmatrix erfahrungsgemäß Schwierigkeiten bereiten kann, steht das *Falksche Schema* als Organisationshilfe zur Verfügung:

	B
A	$A \cdot B$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

			3	0	3
			4	2	4
			1	2	3
2	1	0	10	2	10
3	1	2	15	6	19

Für die Matrizenmultiplikation gilt:

(1) das *Assoziativgesetz:*

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

(2) das *Distributivgesetz:*

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

Für die Matrizenmultiplikation gilt hingegen nicht das Kommutativgesetz, denn nach den obigen Erläuterungen ist im allgemeinen $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Tritt eine Matrix A mehrfach als Faktor auf, so schreibt man vereinfachend:

$$A \cdot A = A^2$$

$$A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A = A^3$$

usw.

4. *Inverse Matrix*

Die Darstellung reziproker Matrizenpotenzen von A erfolgt mit Hilfe der Inversen (Kehrmatrix) A^{-1}.

Es gilt nämlich $a \cdot 1/a = a^1 \cdot a^{-1} = a^0 = 1$.

Entsprechend ist $A^1 \cdot A^{-1} = A^0 = E$.

Wenn das Produkt zweier quadratischer Matrizen des gleichen Typs die Einheitsmatrix E ergibt, so bezeichnet man die eine als inverse Matrix (Inverse, Kehrmatrix) der anderen und kennzeichnet sie - entsprechend der Schreibweise bei Skalaren – durch den hochgestellten Index „minus Eins".

Zahlenbeispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A^{+1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$A^{+1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Für die Multiplikation einer Matrix mit ihrer Inversen gilt das Kommutativgesetz. Es ist leicht nachweisbar, daß eine quadratische Matrix nur eine Inverse haben kann. Die Bestimmung der Inversen einer Matrix kann in Analogie zur Errechnung des reziproken Wertes einer skalaren Größe gesehen werden. Die Analogie ist jedoch keineswegs vollständig: Jede von Null verschiedene skalare Größe hat einen reziproken Wert. Im Gegensatz dazu hat nicht jede quadratische – von der Nullmatrix verschiedene – Matrix eine Inverse.

Die Division einer quadratischen Matrix $B_{(n,\,n)}$ durch eine quadratische Matrix $A_{(n,\,n)}$ wird als Multiplikation von B mit der Inversen A^{-1} dargestellt:

$$A^{-1}_{(n,\,n)} \cdot B_{(n,\,n)} = R_{(n,\,n)}$$

Wegen der Nichtkommutativität der Matrizenmultiplikation gibt es bei quadratischen Matrizen von B zwei verschiedene Quotientenmatrizen, je nachdem, ob die Inverse A^{-1} von links oder von rechts multipliziert wird:

$$B_{(n,\,n)} \cdot A^{-1}_{(n,\,n)} = Q_{(n,\,n)}$$

$$A^{-1}_{(n,\,n)} \cdot B_{(n,\,n)} = R_{(n,\,n)}$$

Zahlenbeispiel:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 25 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 10 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$$

Literatur zur Matrizenrechnung

Adam, A. (Hrsg.): Anwendungen der Matrizenrechnung auf wirtschaftliche und statistische Probleme, Würzburg 1959.

Blumenthal, B.: Die Anwendung mathematischer Methoden in der Wirtschaft, Leipzig 1968.

Jaeger, A., Wenke, K.: Lineare Wirtschaftsalgebra, Stuttgart 1969.

Vogel, F.: Matrizenrechnung in der Betriebswirtschaft, Grundlagen und Anwendungsmöglichkeiten, Opladen 1970.

Kemeny, J. G. u.a.: Mathematik für die Wirtschaftspraxis (deutsche Übersetzung), 2. Aufl., Berlin–New York 1972.

Schwarze, J.: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Bd. 3: Lineare Algebra und Lineare Programmierung, 6. Aufl., Herne–Berlin 1981.

D. Standardansatz der linearen Planungsrechnung

Nach diesen Demonstrationsbeispielen soll nun die *allgemeine Form eines linearen Programms* angegeben werden. In mathematischer Symbolik lassen sich die linearen Optimierungsaufgaben wie folgt darstellen:

(1) In einer linearen Funktion (*Zielfunktion*)

$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n$

sind reelle Zahlen x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) gesucht, für die Z maximal bzw. minimal wird, und zwar

(2) unter den Nebenbedingungen

$$
\begin{array}{l}
a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1j}\,x_j + \ldots + a_{1n}\,x_n \gtreqless b_1 \\
a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2j}\,x_j + \ldots + a_{2n}\,x_n \gtreqless b_2 \\
\vdots \\
a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \ldots + a_{ij}\,x_j + \ldots + a_{in}\,x_n \gtreqless b_i \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n \gtreqless b_m
\end{array}
$$

und

$x_j \geqslant 0$ für $j = 1, 2, \ldots, n$ (Nichtnegativitätsbedingung)

Gekürzte mathematische Schreibweise mit Summenzeichen:

(1) Maximiere bzw. minimiere

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

(2) unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \gtreqless b_i \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Linearer Programmansatz in Matrizenschreibweise:

(1) Maximiere oder minimiere $Z = c'x$

(2) unter den Nebenbedingungen

$$A \cdot x \gtreqless b$$

$$x \geqslant o$$

Wobei c' ein Zeilenvektor mit n Elementen, x ein Spaltenvektor mit n Elementen, A eine $m \cdot n$-Matrix, b ein Spaltenvektor mit m Elementen und o ein Spaltenvektor mit n Nullelementen ist.

Dabei repräsentieren die Symbole

x_j die $j = 1, 2, \ldots, n$ Entscheidungsvariablen, d.h. die Unbekannten, deren Werte optimal gewählt werden sollen;

c_j die $j = 1, 2, \ldots, n$ Zielfunktionskoeffizienten, die den Beitrag der zugehörigen Entscheidungsvariablen zum Entscheidungskriterium Z angeben;

a_{ij} die Koeffizienten der Nebenbedingungen als Gewichtungsfaktoren der Entscheidungsvariablen x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) bezüglich der i-ten Nebenbedingung ($i = 1, 2, \ldots, m$);

b_i die i = 1, 2, . . . , m rechten Seiten der Nebenbedingungs(un)gleichungen geben den Betrag an, der von der Summe der mit ihren Koeffizienten a_{ij} gewichteten Entscheidungsvariablen x_j nicht überschritten ($\leqslant$) bzw. nicht unterschritten ($\geqslant$) werden darf oder aber auch genau erreicht werden muß (=). Bei Maximierungsproblemen steht die „kleiner–gleich"-Bedingung ($\leqslant$) und bei Minimierungsaufgaben umgekehrt die „größer–gleich"-Bedingung ($\geqslant$) im allgemeinen im Vordergrund; für jede Nebenbedingung ist genau eines der angegebenen Relationszeichen zu verwenden.

III. Simplexmethode

Das graphische Verfahren zur Lösung *linearer Programmierungsaufgaben* ist nur sehr begrenzt anwendbar. Praktisch relevante Probleme lassen sich graphisch nicht lösen. Von den verschiedenen *numerischen Lösungsverfahren*, die entwickelt worden sind, ist die von *DANTZIG* entwickelte *Simplexmethode* die wohl bekannteste und am meisten verbreitete Methode. Die Simplexmethode ist ein *allgemeines Lösungsverfahren* für *lineare Programmierungsaufgaben* mit *beliebig vielen Variablen.* Das graphische Lösungsverfahren zeigt auf sehr einfache Weise die Funktionsweise der Simplexmethode. Beide Verfahren basieren auf der wichtigen Erkenntnis: *optimale Lösungen* eines linearen Programms können nur *Eckpunkte* oder der *Rand* des *zulässigen Lösungsbereichs* sein. Der Name *„Simplex"* leitet sich von der Form des Bereiches der zulässigen Lösungen ab. Man bezeichnet im n-dimensionalen Raum ein aus n + 1 Eckpunkten bestehendes konvexes Polyeder als einen n-dimensionalen Simplex (zweidimensionaler Simplex: Dreieck, dreidimensionaler Simplex: Tetraeder). Die Simplexmethode macht sich also das *Eckentheorem* zunutze. Das Rechenverfahren beschränkt sich deshalb bei der Suche nach dem Optimum auf die Eckpunkte des Restriktionspolyeders – das sind algebraisch die sog. *Basislösungen* des Gleichungssystems (Münstermann, H., 1969, S. 186 ff.).

Ein lineares Programm läßt sich mit Hilfe der Simplexmethode lösen, wenn es in *Normalform* dargestellt ist. Dazu ist folgendes erforderlich:

(1) $b_i \geqslant 0$, d.h. alle *rechten Seiten* der Nebenbedingungsgleichungen dürfen nicht negativ sein;

(2) bei Maximierungsproblemen müssen die Nebenbedingungen von der folgenden Art sein:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

(3) bei Minimierungsproblemen müssen die Nebenbedingungen von der folgenden Art sein:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Jedes lineare Optimierungsproblem läßt sich in die *Normalform* bringen.

Das *Prinzip der Simplexmethode* beruht auf dem bereits erwähnten *Eckentheorem*, wonach das Optimum auf mindestens einem Eckpunkt des zulässigen Lösungsbereichs liegen muß. Man braucht nicht alle Ecken zu kennen, um das Optimum bestimmen zu können. Es genügt zunächst ein einziger Eckpunkt des zulässigen Lösungsbereichs, um dann *schrittweise* von *Eckpunkt zu Eckpunkt zu springen*, bis man einen *optimalen Eckpunkt erreicht* hat (*Iterationsverfahren*). Dabei springt man nur auf benachbarte Eckpunkte.

1. Überführung des Ungleichungssystems in ein Gleichungssystem

Der erste Schritt bei der Anwendung der Simplexmethode konzentriert sich auf das System der linearen Nebenbedingungen (Restriktionen). Da die numerische (algebraische) Behandlung von *Ungleichungen* als Restriktionen umständlich ist, werden zunächst die *Ungleichungen in Gleichungen überführt*. Jede Ungleichung wird durch die Einführung einer *Hilfsvariablen* (auch *Schlupf-*, *Zusatz-*, *Pseudovariable* genannt) x_{n+i} (i = 1,2, . . . , m) *in* eine *Gleichung* überführt. Dadurch entsteht ein inhomogenes *lineares Gleichungssystem* für die m Nebenbedingungen mit n + m Variablen, nämlich n eigentliche Variablen (*Hauptvariablen, Strukturvariablen*) und m Schlupfvariablen. Das *lineare Gleichungssystem* ist *unterbestimmt*.
Bei der Maximierungsaufgabe stellen die Schlupfvariablen ökonomisch z.B. *Leerkapazitäten* (von den eigentlichen Variablen *nicht verbrauchte Kapazitäten*) der entsprechenden Nebenbedingung dar. Gilt für den Schlupf der i-ten Gleichung $x_{n+i} = 0$, so ist die i-te Kapazität voll ausgelastet; bei dem gefundenen Programm existiert dann hier keine Leerkapazität.
Die Schlupfvariablen haben in der Zielfunktion die Koeffizienten Null, da leerstehende Kapazitäten keinen Zielbeitrag (z.B. keinen Deckungsbeitrag) leisten.
Für das oben graphisch gelöste Beispiel einer Maximierungsaufgabe – *Optimierung eines Produktionsprogramms* – ist folgendes lineares Programm zu lösen:

Maximiere $G = 110x_1 + 160x_2$

unter den Nebenbedingungen (Restriktionen)

$$35x_1 + 70x_2 \leqslant 9.800$$
$$10x_1 + 8x_2 \leqslant 1.600$$
$$15x_1 + 20x_2 \leqslant 3.000$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$$

Durch *Einführen* von drei *Schlupfvariablen* x_3, x_4 und x_5 *wandeln* sich die ersten drei *Ungleichungen* des Programmansatzes *in Gleichungen* um:

$$
\begin{aligned}
35x_1 + 70x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad &= 9.800 \\
10x_1 + 8x_2 \qquad + x_4 \qquad\quad &= 1.600 \\
15x_1 + 20x_2 \qquad\qquad\quad + x_5 &= 3.000
\end{aligned}
$$

Schlupfvariablen

Die Nichtnegativitätsbedingung ist auf alle Variablen – also auch auf die Schlupfvariablen – auszudehnen, da andernfalls die „kleiner–gleich"-Bedingung bei den Restriktionen nicht eingehalten werden würde.

$$x_j \geqslant 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 5).$$

Statt der bisherigen Interpretation der Restriktionen, daß die Inanspruchnahme (Verbrauch) der Produktionsfaktoren nicht größer sein darf als deren verfügbare Kapazität, lassen sich die Gleichungen nunmehr wie folgt erklären: Die Summe aus Leerkapazität (ungenutzte Kapazität) plus genutzte Kapazität ist gleich der Gesamtkapazität eines Faktors.

Materiell hat sich durch die Einführung der Schlupfvariablen nichts geändert. Für $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$ und $x_5 \geqslant 0$ erfüllen alle Variablen $x_1 \geqslant 0$ und $x_2 \geqslant 0$, die das obige Ungleichungssystem erfüllen, auch die Bedingungen des Gleichungssystems. Umgekehrt widersprechen die Variablen $x_1 \geqslant 0$ und $x_2 \geqslant 0$, die für $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$ und $x_5 \geqslant 0$ dem Gleichungssystem genügen, nicht dem obigen Ungleichungssystem. „Die nichtnegativen Schlupfvariablen beeinflussen also niemals die Lösung eines linearen Programms" (*Münstermann, H.*, 1969, S. 188).

Das Gleichungssystem der Nebenbedingungen besteht jetzt aus drei Gleichungen und fünf Entscheidungsvariablen. Das Gleichungssystem ist also unterbestimmt (zwei Freiheitsgrade, d.h. die Werte von zwei Variablen sind frei wählbar). Die Anzahl der Unbekannten (Entscheidungsvariablen) ist größer als die Zahl der linear unabhängigen Gleichungen. Es gibt bei unterbestimmten Gleichungssystemen unendlich viele verschiedene Lösungen, sofern überhaupt zulässige Lösungen existieren. Das konnte bereits an der graphischen Darstellung (vgl. zulässiger Lösungsbereich in Abb. 2) gezeigt werden.

Auf Grund des *Eckentheorems* – auch *Simplex-Theorem* genannt (*Hadley, G.*, 1962, S. 100 ff.) – sind nur *Eckpunktlösungen* von Interesse, da nur *mindestens eine von ihnen die Zielfunktion maximiert* (Hauptsatz der linearen Optimierung). Diese Eckpunktlösungen werden *zulässige Basislösungen* genannt. Hat man ein System von m Gleichungen, so sind von den (m + n) Variablen, d.h. von den *n Hauptvariablen* (Strukturvariablen) und *m Schlupfvariablen*, die Werte von genau m Variablen bestimmbar (gleichviel Unbekannte wie Gleichungen). Dies kann dadurch geschehen, daß die übrigen n Variablen gleich Null gesetzt werden. Diese *n Variablen*, die *gleich Null gesetzt* sind, heißen *Nichtbasisvariablen* im Gegensatz zu den m Variablen, die in der Lösung sind und *Basisvariablen* oder *Lösungsvariablen* genannt werden. Die Werte der m Basisvariablen lassen sich dann aus dem Gleichungssystem auf verschiedene Weisen berechnen.

Auf Grund des *Simplex-Theorems* (Eckentheorems) läßt sich die optimale Lösung berechnen. Das Simplex-Theorem besagt, daß die optimale Lösung eines linearen Programms eine zulässige Basislösung (Eckpunktlösung) sein muß, falls das lineare Programm nur eine optimale Lösung aufweist oder daß sich zur optimalen Lösung mindestens eine optimale Basislösung angeben läßt, falls für das lineare Programm mehrere optimale Lösungen vorliegen (*Hadley, G.*, 1962, S. 100 ff.). Da jedes Gleichungssystem nur endlich viele Basislösungen besitzt, kann entsprechend dem Simplex-Theorem in *endlich vielen Rechenschritten* (Iterationen) aus den zulässigen Basislösungen – die also alle Nebenbedingungen erfüllen – die optimale bestimmt werden. Die Basislösung, bei der die *Zielfunktion ihren Extremwert* (Maximum oder Minimum) erreicht, ist dann die gesuchte *optimale Lösung* des linearen Programms.

Der *Simplex-Algorithmus* ist ein *iteratives Rechenverfahren.* Dabei geht man von einer *ersten zulässigen Basislösung* aus. Man tauscht dann jeweils eine Basisvariable gegen eine Nichtbasisvariable aus, solange dies noch zu einer Verbesserung des jeweils ermittelten Zielfunktionswertes führt.

2. *„Nullprogramm" als erste zulässige Basislösung (Maximierungsproblem)*

Die Simplexmethode zeigt einen Weg, das Optimum zu finden, ohne daß alle Eckpunkte des Lösungsraumes durchgeprüft werden. Zunächst wird eine *zulässige Ausgangslösung* bestimmt. Diese stellt eine *zulässige Basislösung* dar. Im vorliegenden Beispiel der *Optimierung eines Produktionsprogramms* mit den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

ist die *Nullösung* („Nullprogramm") eine zulässige Lösung mit den Hauptvariablen $x_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Dabei werden die b_i-Werte als nichtnegativ vorausgesetzt ($b_i \geqslant 0$ für $i = 1, 2, \ldots, m$). Diese Nullösung liegt (graphisch betrachtet) im Koordinatenursprung. Bei der Nullösung behandelt man also die Strukturvariablen (Hauptvariablen) als Nichtbasisvariablen und setzt sie gleich Null. Das ist vorteilhaft, weil die entsprechenden Werte der Schlupfvariablen, die somit die Basisvariablen sind, aus dem Gleichungssystem ablesbar sind und somit die erste zulässige Basislösung sofort bestimmt werden kann. Im Beispiel haben am Koordinatenursprung ($x_1 = 0$ und $x_2 = 0$) die übrigen Variablen die Werte $x_3 = 9.800$, $x_4 = 1.600$ und $x_5 = 3.000$ mit $G = 110 \cdot 0 + 160 \cdot 0 + 0 \cdot 9.800 + 0 \cdot 1.600 + 0 \cdot 3.000 = 0$.

Da in diesem „Nullprogramm" *nichts* gefertigt wird, ist der Deckungsbeitrag (kurz Gewinn) Null und die vorhandenen Kapazitäten stellen sämtlich Leerkapazitäten dar.

Diese zulässige Basislösung stellt sicherlich nicht die optimale Lösung des linearen Programms dar. Man versucht nun, diese Lösung zu verbessern.

3. Simplexkriterium

Der Übergang von einer zulässigen Basislösung (Eckpunkt des Lösungsbereichs) zu einer anderen geschieht dadurch, daß eine Lösungsvariable (Basisvariable) in der aktuellen Lösung durch eine Variable, die nicht in dieser Lösung enthalten ist (Nichtbasisvariable), ersetzt wird. Hierbei ist allerdings sicherzustellen, daß die neue Basislösung nicht nur zulässig ist, sondern auch „besser" ist als die alte; dies bedeutet:

(1) Es ist zu überprüfen, ob die erreichte Lösung die gesuchte Optimallösung bereits darstellt;

(2) falls die gesuchte Optimallösung noch nicht erreicht ist, müssen
- die aufzunehmende und die aus der Basislösung zu eliminierende Variable mit der Maßgabe bestimmt werden, daß
  - eine verbesserte Lösung erreicht wird,
  - die neue (verbesserte) Lösung im zulässigen Lösungsraum liegt;
- die Werte der Basisvariablen der neuen Lösung ermittelt werden.

Ob bereits die Optimallösung vorliegt oder ob eine Lösung verbessert werden kann, wird an Hand des *Simplexkriteriums* (*Krelle, W., Künzi, H. P.*, 1958, S. 29) überprüft. Man ***vergleicht für alle Nichtbasisvariablen die Vor- und Nachteile ihrer Aufnahme in die Basislösung.*** Dazu werden $(z_j - g_j)$-Differenzen gebildet. z_j zeigt die Zu- oder Abnahme des Zielfunktionswertes (z.B. des Gewinns) durch Veränderungen an den Basisvariablen mit dem Index j. Die Variation des Zielfunktionswertes durch Veränderungen an den Basisvariablen wird also zu dem Symbol z_j zusammengezogen:

$$z_j = g_1 a_{1j} + g_2 a_{2j} + \ldots + g_m a_{mj}$$

bzw.

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} g_i a_{ij}$$

Dabei sind a_{ij} die Koeffizienten der Variablen in den Nebenbedingungen und g_i die Zielfunktionskoeffizienten der Basisvariablen, während g_j die Zielfunktionskoeffizienten der Variablen in der Zielfunktion sind.

Der Austausch der Variablen führt dann zu einer Vergrößerung des Zielfunktionswertes (z.B. zu einer *Gewinnvergrößerung*), wenn für die Differenz gilt:

$$g_j - z_j > 0 \text{ oder}$$

$$\boxed{z_j - g_j < 0} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^{m} g_i a_{ij} - g_j < 0$$

Die Differenz $(z_j - g_j)$ zeigt für eine Basislösung, ob die Aufnahme der Nichtbasisvariablen x_j in die Basis zu einer Verbesserung der Lösung führen kann. Die *Differenzen* $(z_j - g_j)$ heißen auch *Opportunitätskosten, Schattenpreise oder Vor- und Nachteilewerte.*

Bei Anwendung der Simplexmethode wird nach jeder gefundenen zulässigen Basislösung (Ausgangslösung und nach jeder Iteration) geprüft, ob eine oder mehrere negative Differenzen (für die Nichtbasisvariablen) noch existieren. Nur die Aufnahme von solchen Nichtbasisvariablen in die Basislösung kann sinnvoll sein, die zu einer Verbesserung der Lösung führen. Das Ende der Vornahme von Austauschschritten zeigt das Simplexkriterium an: Sind *alle Opportunitätskosten nichtnegativ*, also alle $(z_j - g_j) \geqslant 0$, so ist die *Optimallösung* gefunden.

4. Simplextableau

Um mit möglichst wenig Rechenaufwand die Durchführung der Iterationsschritte zu ermöglichen, hat sich eine bestimmte rationelle Vorgehensweise für die Simplexmethode gebildet. Sie ist mit geringen Modifikationen in der Literatur stark verbreitet (*Bloech, J.*, 1974, S. 74 ff.). Man kann mit dieser *Rechentechnik der Simplexmethode (Simplex-Algorithmus)* lineare Programmierungsaufgaben mit beliebig vielen Variablen lösen. Das *iterative Rechenverfahren*, das von einer *ersten zulässigen Basislösung* (z.B. „Nullprogramm") ausgeht und dann solange jeweils eine *Basisvariable gegen* eine *Nichtbasisvariable austauscht, bis keine Verbesserung des Zielfunktionswertes mehr möglich ist,* erfolgt in einem festen Schema, dem sogenannten *Simplextableau.* Dabei wird der Austausch der Variablen so vorgenommen, daß man immer zulässige Basislösungen erhält und mit jeder Iteration eine Verbesserung des Zielfunktionswertes erreicht wird. Die notwendigen *Umformungen* werden in Matrizenform, d.h. in Simplextableaus dargestellt. Dabei kommt als *Lösungsmethode der modifizierte Gaußsche Algorithmus* zur Anwendung (*Münstermann, H.*, 1969, S. 97 und S. 186): das lineare Gleichungssystem wird mit Hilfe sog. *elementarer Zeilenoperationen* umgeformt. (Der Name „modifizierter Gaußscher Algorithmus" weist auf den Unterschied dieser Lösungsmethode gegenüber dem Gaußschen Algorithmus hin, der die Transformation der Koeffizientenmatrix nur in eine Dreiecksmatrix zum Ziel hat. Der modifizierte Gaußsche Algorithmus formt eine Koeffizientenmatrix in eine Diagonalmatrix um.)
Wir wollen nun zur Verdeutlichung der Rechentechnik des modifizierten Gaußschen Algorithmus (mit Simplextableaus) unsere Maximierungsaufgabe von oben – *Optimierung eines Produktionsprogramms* – rechnerisch lösen.
Die Zielfunktion lautet:

Maximiere $G = 110x_1 + 160x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

Nebenbedingungen:

$$35x_1 + 70x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 9.800$$
$$10x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 1.600$$
$$15x_1 + 20x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 3.000$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0$$

Diesen *Ansatz faßt* das folgende *Simplextableau* (Tableau I) *zusammen*. Die Reihenfolge der Spalten wird in der Rechnung nie verändert, somit brauchen die Symbole der Variablen nur in die Kopfzeile über die betreffenden Spalten geschrieben zu werden. Das Tableau I stellt gleichzeitig eine *zulässige Ausgangslösung*, die *Nulllösung (Nullprogramm)* dar. Die drei *Schlupfvariablen* x_3, x_4 und x_5 sind *Basisvariablen*. Sie erscheinen in der Vorspalte x_B (Spalte der Variablen, die sich in der Basislösung befinden). Die beiden *Hauptvariablen* (Strukturvariablen) x_1 und x_2 sind *Nichtbasisvariablen*; sie nehmen daher den *Wert Null* an. (Das Gleichungssystem ist unterbestimmt und besitzt zwei Variablen, deren Wert frei gewählt werden kann. Zwei Variablen werden also jeweils gleich Null gesetzt, damit werden die restlichen drei Variablen bestimmbar.) Die *Lösungswerte der Basisvariablen* liest man in der b_i-Spalte (die auch „*Rechte Seite*" *(RS)* genannt wird) mit $x_3 = 9.800$, $x_4 = 1.600$ und $x_5 = 3.000$ ab. Dort ist auch die jeweilige Zielgröße angegeben (G = 0). Diese zulässige Basislösung entspricht bei der graphischen Darstellung dem Koordinatenursprung 0 (vgl. Abb. 2). In die zweite Spalte werden die Zielfunktionskoeffizienten der Basisvariablen (g_i) eingetragen. Fortlaufend nach rechts folgen die Spalten der Koeffizientenmatrix mit den a_{ij}-Werten (den Koeffizienten der Nebenbedingungen). Unter diesem sog. Kern des Tableaus werden – zunächst zur Verdeutlichung – die zugehörigen Zielfunktionskoeffizienten g_j in eine Zeile und immer die Schattenpreise der einzelnen Variablen in die unterste Zeile geschrieben. (Für geübte Rechner ist die g_j-Zeile und die g_i-Spalte entbehrlich. In der Literatur wird daher oft nur die Zeile der $(z_j - g_j)$-Werte geführt.) Der Schattenpreis der Spalte j ergibt sich als Differenz $z_j - g_j$. Die Koeffizienten der *Entscheidungszeile* $(z_j - g_j)$ geben darüber Aufschluß, ob die gefundene Lösung durch eine weitere Iteration noch verbessert werden kann. Das Simplexkriterium besagt ja: erst wenn in der letzten Zeile nur nichtnegative Schattenpreise stehen, ist die optimale Lösung erreicht.

Tabelle 1: Tableau I – Simplex-Ausgangstableau – „Nulllösung"

x_B	Variablen / g_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS (b_i)	q_i
x_3	0	35	(70)	1	0	0	9.800	$\frac{9.800}{70} = 140$
x_4	0	10	8	0	1	0	1.600	$\frac{1.600}{8} = 200$
x_5	0	15	20	0	0	1	3.000	$\frac{3.000}{20} = 150$
g_j		110	160	0	0	0	–	
$z_j - g_j$		–110	–160	0	0	0	G = 0	

Bei einer wegen $b_i \geqslant 0$ zulässigen Basislösung eines linearen Programms lautet das *erste Simplex-Tableau* in *allgemeiner Schreibweise:*

Tabelle 2: Tableau Ia – Simplex-Ausgangstableau in allgemeiner Schreibweise

x_B \ Variablen	g_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+2} ...	x_{n+m}	RS (b_i)
x_{n+1}	0	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}	1	0 ...	0	b_1
x_{n+2}	0	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}	0	1 ...	0	b_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮ ⋮⋮⋮	⋮	⋮
x_{n+m}	0	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mn}	0	0 ...	1	b_m
$z_j - g_j$		$-g_1$	$-g_2$	$-g_3$	...	$-g_n$	0	0 ...	0	$G = 0$

5. *Iterationen*

a) Spaltenauswahl

Gilt $(z_j - g_j) < 0$ für eine Nichtbasisvariable x_j, so wird eine Nichtbasisvariable gegen eine Basisvariable ausgetauscht. Die Auswahl der Nichtbasisvariablen entspricht der ***Spaltenwahl,*** d.h. es wird die Spalte gewählt, in der sich die in die Basis (Basislösung) aufzunehmende Variable befindet; sie heißt ***Pivotspalte.***
Für die zweckmäßige Auswahl der Pivotspalte bei mehr als einem negativen Schattenpreis in der $(z_j - g_j)$-Zeile gibt es zwei Versionen:
(1) „Steepest Unit Ascent"-Version und
(2) „Greatest Change"-Version.
Nach der ***„Steepest Unit Ascent"-Version*** ist diejenige Nichtbasisvariable in die Lösung einzuführen, die den ***größten Zielfunktionsbeitrag pro Mengeneinheit*** erbringt. Hiernach kommt diejenige Nichtbasisvariable in die Basislösung, die z.B. den größten Gewinnzuwachs pro Mengeneinheit zuläßt, bei der mithin der steilste Anstieg pro Einheit zu realisieren ist. Nach der „Steepest Unit Ascent"-Version ist also die Spalte mit der minimalen Differenz die Pivotspalte (k). In unserem Beispiel ist das die Spalte $k = 2$ mit $z_2 - g_2 = -160$. Die Aufnahme von x_2 in eine neue Basis erhöht den Gewinn G um 160 DM je produzierte und abgesetzte Mengeneinheit der Produktart P_2.

b) Zeilenauswahl

Ist die Frage geklärt, welche Nichtbasisvariable in die neue Basis einzuführen ist (Spaltenauswahl), so muß noch festgelegt werden, welche Basisvariable dafür aus der Basis ausscheiden muß, d.h. im vorliegenden Beispiel gegen die neu einzuführende Basisvariable x_2 ausgetauscht wird. Da die ausscheidende Variable als künfti-

ge Nichtbasisvariable den Wert Null annehmen muß, scheidet die mit der engsten Restriktion aus (*Zeilenauswahl*). Zur Ermittlung der engsten Restriktion (des Engpasses für die einzuführende Variable x_k) werden für die Werte $a_{ik} > 0$ die Quotienten $\frac{b_i}{a_{ik}} = q_i$ gebildet; der kleinste Quotient gibt die *engste Restriktion* an. Das Minimum der Quotienten, die durch Division der Werte der RS-Spalte (RS-Spalte, auch Lösungsspalte, Spalte der „Rechten Seite") (b_i) durch die zugehörigen positiven Koeffizienten der aufzunehmenden Variablen (also der positiven Koeffizienten a_{ik} der Pivotspalte k) hervorgehen, bestimmt die ausscheidende Variable. (Nur die positiven Koeffizienten kommen als Divisor in Frage, da eine Null keine Veränderung des Zielfunktionswertes G bringen und ein negativer Koeffizient gar zu einer unzulässigen Lösung (Verletzung der Nichtnegativitätsbedingung) führen würde.) Die Division ist im Tableau I in der Hilfsspalte q_i vorgenommen. Der kleinste Quotient ist im Beispiel 140; er befindet sich in der ersten Zeile der Matrix. Die *Auswahlzeile* wird – analog zur Auswahlspalte – *Pivotzeile* (Zeilenindex p) genannt. Im Beispiel ist die erste Zeile die Pivotzeile (p = 1) mit der ausscheidenden Variablen x_3. Die Produktion von 140 Mengeneinheiten von P_2 ($x_2 = 140$) läßt die seitherige Basisvariable x_3 auf Null schrumpfen.

Nachdem über den Austausch der Variablen entschieden ist, können die Umformungen des linearen Gleichungssystems beginnen. Zuvor soll aber noch auf die Möglichkeit der Spaltenauswahl nach der „Greatest Change"-Version eingegangen werden.

Die *Spalten- und Zeilenauswahl* nach der *„Greatest Change"-Version* berücksichtigt den Tatbestand, daß die Erhöhung des Zielfunktionswertes (G) nicht nur von den Differenzen $(z_j - g_j) < 0$ pro Mengeneinheit abhängig ist, sondern auch davon, um wieviel die neu in die Basis aufzunehmende Nichtbasisvariable wächst, d.h. welchen Wert sie in der neuen Lösung annehmen wird. Diesen Wert erhält man aus dem kleinsten positiven Quotienten $q_{ij} = \frac{b_i}{a_{ij}}$ für alle Spalten j mit negativen Schattenpreisen $(z_j - g_j < 0)$. Bei der „Greatest Change"-Version der Simplexmethode wird für jede Spalte des Tableaus mit negativer $(z_j - g_j)$-Differenz (Schattenpreis) der kleinste Quotient q_{ij} bestimmt und mit dem entsprechenden Schattenpreis multipliziert. Als *Pivotspalte und Pivotzeile* werden die mit dem minimalen Produkt aus diesen beiden Größen ausgewählt. Dieses Produkt stellt als Absolutwert zugleich die gesamte Erhöhung des Zielfunktionswertes (G) dar.

Im Beispiel würden sich für die Spalte j = 1 folgende Quotienten q_{i1} ergeben:

$$q_{11} = \frac{9800}{35} = 280, \qquad q_{21} = \frac{1600}{10} = 160, \qquad q_{31} = \frac{3000}{15} = 200$$

Der kleinste Quotient für die Spalte j = 1 ist $q_{21} = 160$. Diesen Quotienten multipliziert mit dem zugehörigen Schattenpreis (−110) ergibt −17.600. Der kleinste Quotient für die Spalte j = 2 ist $q_{12} = \frac{9800}{70} = 140$. Multipliziert man diesen mit

dem zugehörigen Schattenpreis (−160), so erhält man −22.400. Das minimale Produkt ist also −22.400, so daß im Beispiel auch nach der „Greatest Change"-Version Spalte k = 2 und Zeile p = 1 die Pivotspalte bzw. Pivotzeile bilden würden. Bei umfangreicheren Optimierungsproblemen führt die „Greatest Change"-Version in der Regel (also nicht immer) mit weniger Iterationen zur Optimallösung. Sie erfordert dafür aber mehr Rechenaufwand bei der Spalten- und Zeilenauswahl.

c) Matrizenoperationen des modifizierten Gaußschen Algorithmus

Die *Matrizenoperationen (elementare Zeilenoperationen)* des *modifizierten Gaußschen Algorithmus* zur Bestimmung der verschiedenen Basislösungen eines linearen Gleichungssystems lassen sich ebenfalls übersichtlich in *Tabellenform* wiedergeben. Nachdem im Beispiel die zweite Spalte als *Pivotspalte* (k = 2) und die erste Zeile als *Pivotzeile* (p = 1) bestimmt ist, wird das Element $a_{pk} = a_{12} = 70$ *Pivotelement* genannt. Es liegt im *Kreuzungspunkt der Pivotspalte und Pivotzeile* („pivot" (franz.): Drehpunkt, Angelpunkt) und wird jeweils durch einen Kreis markiert.
Für die neue Basis wird das Gleichungssystem gelöst. Dabei muß das Gleichungssystem so umgeformt werden, daß die neue Basisvariable x_2 nur noch in einer Nebenbedingung erscheint; d.h. sie muß aus allen übrigen Nebenbedingungsgleichungen eliminiert werden – die klassische Methode zur Lösung von linearen Gleichungssystemen ist die *Eliminationsmethode* (*Müller-Merbach, H.*, 1973, S. 34 ff.). Dazu wird die Pivotzeile (p) durch das Pivotelement (a_{pk}) dividiert, und es wird von jeder anderen Zeile i (i ≠ p) das $\frac{a_{ik}}{a_{pk}}$-fache der Zeile p (Pivotzeile) subtrahiert. Auch von der Entscheidungszeile (letzte Zeile) wird das $\frac{(z_k - g_k)}{a_{pk}}$-fache der Zeile p abgezogen. Es entsteht das zweite Simplextableau nach der ersten Iteration:

Tabelle 3: Tableau II – Lösung nach der 1. Iteration

	x_B \ Variablen g_i		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS (b_i)	q_i
→	x_2	160	1/2	1	1/70	0	0	140	280
	x_4	0	6	0	−8/70	1	0	480	80
	x_5	0	(5)	0	−2/7	0	1	200	40
	$z_j - g_j$		−30	0	16/7	0	0	G = 22.400	

Das zweite Tableau stellt eine *neue zulässige Basislösung* dar, in der die Basisvariablen x_2 = 140, x_4 = 480 und x_5 = 200 auftreten. Die Variablen x_1 und x_3 sind in dieser Lösung Nichtbasisvariablen (mit dem Wert Null). Dieses Programm, das dem

Eckpunkt A der graphischen Darstellung entspricht (vgl. Abb. 2), würde also nur Produktart P_2 mit $x_2 = 140$ Mengeneinheiten realisieren und dabei die Kapazität der ersten Produktionsfaktorgruppe (Roh-, Hilfsstoffe etc.) vollständig verbrauchen. Dies erkennt man daran, daß die Schlupfvariable x_3 (also die ungenutzte Kapazität der Faktorgruppe 1) Nichtbasisvariable ist ($x_3 = 0$). Die ungenutzte Kapazität der Faktorgruppe 2 beträgt – wie aus der Lösungsspalte RS abzulesen ist – hingegen noch $x_4 = 480$ Maschinenstunden ($1600 - 140 \cdot 8 = 480$) und die der Faktorgruppe 3 noch $x_5 = 200$ Arbeitsstunden ($3000 - 140 \cdot 20 = 200$). Der zugehörige Gewinn beträgt G = 22.400 DM.
Durch den Rechenschritt sind auch die Opportunitätskosten (Schattenpreise) in diejenigen überführt worden, die für diese Basislösung gelten. Diese Opportunitätskosten können auch durch getrennte Berechnung der Werte z_j und die Bildung der Differenzen $z_j - g_j$ ermittelt werden:

$$z_1 = \sum_{i=1}^{m} g_i a_{i1} = 160 \cdot 1/2 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 5 = 80$$

$$z_1 - g_1 = 80 - 110 = -30$$

$$z_3 - g_3 = (160 \cdot 1/70 + 0 \cdot (-8/70) + 0 \cdot (-20/70)) - 0 = 16/7$$

Die übrigen Differenzen in der Entscheidungszeile sind alle Null, wie sich leicht nachprüfen läßt. Der letzte Wert der untersten Zeile gibt mit G = 22.400 den Gewinn (Zielfunktionswert) des Programms an. Er wurde gebildet, indem zu dem Wert Null des ersten Tableaus das 160-fache von $b_p = 140$ addiert wurde.
Die Rechnung wird fortgeführt:
Da in der vorliegenden Lösung des Tableaus II $(z_1 - g_1) < 0$ ist, führt die Aufnahme von x_1 in ein neues Programm zu einer Gewinnsteigerung von DM 30,– je produzierte und abgesetzte Mengeneinheit des Produktes P_1 (Simplex-Kriterium). Die Iteration wird wie beschrieben wiederholt. Pivotspalte ist die erste Spalte ($k = 1$), Pivotzeile ist die dritte Zeile ($p = 3$) und Pivotelement ist $a_{31} = 5$ (vgl. die Kreismarkierung im Tableau II). Durch Division der Pivotzeile ($p = 3$) durch das Pivotelement ($a_{31} = 5$) erhält man die dritte Zeile der neuen Lösung (Tableau III). Die neue erste Zeile des Tableaus III erhält man durch Subtraktion des (1/2)-fachen der neuen dritten Zeile von der ersten Zeile des Tableaus II. Analog berechnet sich die zweite Zeile des Tableaus III durch Subtraktion des 6-fachen der neuen dritten Zeile von der zweiten Zeile des Tableaus II. Die vierte Zeile des neuen Tableaus schließlich ergibt sich, indem man das (–30)-fache der neuen dritten Zeile von der vierten Zeile des Tableaus II subtrahiert. Die Lösung nach der zweiten Iteration lautet:

Tabelle 4: Tableau III – Lösung nach der 2. Iteration – Optimallösung

x_B	Variablen / g_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS (b_i)
x_2	160	0	1	3/70	0	–1/10	120
x_4	0	0	0	8/35	1	–6/5	240
→ x_1	110	1	0	–2/35	0	1/5	40
$z_j - g_j$		0	0	4/7	0	6	G = 23.600

Das dritte Tableau wird anhand des Simplexkriteriums auf Optimalität hin geprüft. Da die Entscheidungszeile keine negativen Schattenpreise (Differenzen $(z_j - g_j) \geqslant 0$, für alle j) hat, gibt es keine Verbesserungsmöglichkeit mehr. Das *optimale Produktionsprogramm* ist ermittelt; es entspricht der Lösung für den Eckpunkt B in Abb. 2.

6. Zusammenfassung der Vorgehensweise nach der Simplexmethode

Nachdem alle *Rechenregeln der Simplexmethode* besprochen sind, sollen sie zusammengefaßt dargestellt werden. Die Simplexmethode läßt sich in folgende, *für eine EDV-Programmgestaltung relevanten Schritte* zerlegen, wenn keine Sonderfälle (die später behandelt werden) vorliegen:

Schritt 1:
Bilde das Ausgangstableau (Nullprogramm)! Alle Elemente der „Rechten Seite" (RS), in der die Beschränkungen (b_i) stehen, sind nicht negativ ($b_i \geqslant 0$). Die Basisvariablen x_B (in der Ausgangslösung sind dies die Schlupfvariablen x_{n+i} (i = 1, 2, . . . , m)) haben in der entsprechenden Spalte den Koeffizient „+1". Alle anderen Koeffizienten der Basisvariablen haben den Wert Null.

Schritt 2:
Sind in der $(z_j - g_j)$-Zeile (Entscheidungszeile) alle Koeffizienten nicht negativ? Wenn ja, ist das Optimalprogramm erreicht (Simplexkriterium). Wenn nein, folgt Schritt 3.

Schritt 3:
*Wahl der Pivotsp*alte k z.B. nach „Steepest Unit Ascent"-Version: das minimale Element der Entscheidungszeile ($(z_j - g_j)$-Werte) ist zu bestimmen. Die zugehörige Spalte ist die Auswahlspalte (Pivotspalte); die entsprechende Nichtbasisvariable soll in die Basis eingeführt werden.

Schritt 4:
Wahl der Pivotzeile p: bilde aus den Werten der RS-Spalte und den entsprechenden Koeffizienten der Pivotspalte die Quotienten q_i für alle positiven Koeffizienten der Pivotspalte: $q_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$ für $a_{ik} > 0$. Die Zeile mit dem minimalen Quotienten q_i ist die Auswahlzeile (Pivotzeile) p. Auswahlspalte k und Pivotzeile p kreuzen sich im Pivotelement a_{pk}.

Schritt 5:
Jedes Element der Pivotzeile (also auch b_p) wird durch das Pivotelement a_{pk} dividiert. Das Ergebnis wird an gleicher Stelle in ein neues Simplextableau geschrieben. Diese Zeile erhält in der Vorspalte x_B die Variable aus der Pivotspalte (neue Basisvariable, Variablenaustausch).

Schritt 6:
Von allen Zeilen i, die nicht Pivotzeile sind, wird von jedem Element das a_{ik}-fache des neuen Wertes der Pivotzeile p subtrahiert. Die Ergebnisse sind in das neue Tableau einzutragen; das Gleichungssystem ist umgeformt. Die neuen Werte der $(z_j - g_j)$-Zeile werden auf die gleiche Weise ermittelt und eingetragen.
Es folgt Schritt 2!

B. Wirtschaftlicher Inhalt der Optimierungsmethode

1. Ökonomische Interpretation der Inhalte des Simplextableaus

Im vorliegenden Problem der Produktionsplanung sind folgende Tatbestände von wirtschaftlichem Interesse (*Marcus, P.* 1966, *Haupt, P., Wegener,* H., 1973, S. 8 ff.):
Im *Simplex-Ausgangstableau* („Nullösung") stehen in der *RS-Spalte* die *Kapazitäten der Produktionsfaktorgruppen,* über die in der Planperiode disponiert werden kann. Die Dimensionen der Elemente dieser RS-Spalte sind Tonnen, Maschinenstunden, Arbeitsstunden oder ähnliche.
Die (technischen) *Koeffizienten a_{ij}* der Nichtbasisvariablen im *Simplex-Ausgangstableau* (Hauptvariablen) geben den *Mengen- oder Zeitverbrauch* zur *Herstellung* von *einer* Mengeneinheit der Produktart j an Faktor oder Faktorgruppe i wieder. Die Koeffizienten der Basisvariablen x_{n+i} ($i = 1, 2, \ldots, m$) sind 1. Die Basisvariablen besitzen die Dimensionen der entsprechenden Kapazitäten. Im *Ausgangstableau* sind die vorhandenen *Kapazitäten sämtlich ungenutzt (Leerkapazitäten).*
Jede Produktion würde Teile der Leerkapazitäten verdrängen. Die technischen Koeffizienten a_{ij} geben an, wieviele Einheiten der Basisvariablen x_{n+i} durch die Einführung einer Mengeneinheit der Nichtbasisvariablen x_j verdrängt würden. In der *Entscheidungszeile* $(z_j - g_j)$ stehen Größen, die auf *Veränderungsmöglichkeiten* der *Zielgröße* G hinweisen. Der Wert z_j entsteht aus der Summe der mit g_i bewerteten Koeffizienten a_{ij} der Spalte j und beschreibt einen Teil der Auswirkung der

Aufnahme einer Mengeneinheit der Variablen x_j in die Basis. Der Deckungsbeitrag g_j gibt den anderen Teil der Auswirkung an. *Die Differenz* $(z_j - g_j)$ gibt also die *Gesamtveränderung* der *Zielgröße* G an, die durch die ***Aufnahme einer Mengeneinheit*** der *Nichtbasisvariablen* x_j *in die Lösung* entsteht. Die Differenzen $(z_j - g_j)$ sind *Opportunitätskosten* oder *Schattenpreise*. Das negative Vorzeichen für mögliche Zielverbesserungen steht im Einklang mit dem Begriff der Opportunitätskosten (*Bloech, J.*, 1974, S. 85).
Je nach Fortschreiten der Iterationen wechseln die Koeffizienten a_{ij} und b_i ihre Dimensionen. Stets gilt jedoch, daß die Koeffizienten a_{ij} die mengenmäßige Verdrängung der Variablen in der Zeile i durch die Berücksichtigung einer Mengeneinheit der Variablen der Spalte j darstellt. Die Schattenpreise behalten ihre Dimensionen in jedem Tableau.
Zur ***Interpretation der Optimallösung*** entnehmen wir dem Tableau III die ***optimalen Lösungswerte:***

$$x_1 = 40, x_2 = 120, x_3 = 0, x_4 = 240, x_5 = 0 \text{ mit}$$

$$G = 40 \cdot 110 + 120 \cdot 160 = 23.600$$

Ökonomisch interpretiert bedeutet dies: der Betrieb kann unter den gegebenen Umständen als ***kurzfristigen Plan*** folgendes ***optimale Produktionsprogramm*** realisieren: Er fertigt 40 Mengeneinheiten von Produktart P_1 und 120 Mengeneinheiten von Produktart P_2. Dabei sind die Produktionsfaktorgruppen 1 und 3 voll ausgelastet ($x_3 = 0$ und $x_5 = 0$). Sie stellen die *Engpässe* des Programms dar. Die Produktionsfaktorgruppe 2 weist eine Leerkapazität (ungenutzte Kapazität) von 240 Maschinenstunden auf ($x_4 = 240$). Der größtmögliche Deckungsbeitrag des Programms beträgt DM 23.600. Die fixen Kosten, die in der Planungsperiode anfallen, müßten von G abgezogen werden, um das maximale Perioden-Nettoergebnis zu erhalten. Der Betrag der fixen Kosten hat Einfluß nur auf die Höhe des Nettoergebnisses, nicht aber auf das optimale Produktionsprogramm.

2. Bewertung von Engpässen

Dem Tableau III können auch die ***Opportunitätskosten*** der Entscheidungszeile ($(z_j - g_j)$-Differenzen) entnommen werden. Sie liefern in den ***Spalten*** der ***Schlupfvariablen*** die ***Bewertungen für die Engpässe des optimalen Produktionsprogramms,*** d.h. für diejenigen Bedingungen (Restriktionen), die voll ausgeschöpft sind. Im Optimaltableau sind also einige der Schlupfvariablen mit Null vorbestimmt (Nichtbasisvariablen), wodurch die vollständige Ausnutzung der zugehörigen Kapazitäten zum Ausdruck kommt. Im allgemeinen treten in den zugehörigen Spalten der Schlupfvariablen, die Nichtbasisvariablen sind, positive $(z_j - g_j)$-Differenzen auf. Diese ***Schattenpreise*** zeigen die ***Gewinnveränderung*** der Zielgröße G bei ***Veränderung*** der ***zugehörigen Kapazität*** um ***eine Mengeneinheit*** an. Deswegen kann der Gewinn im Optimum auch als Summe der Produkte aus allen Kapazitäten mit ihren Schattenpreisen bestimmt werden; im Beispiel (vgl. Optimaltableau III): $G = 9.800 \cdot 4/7 + 1.600 \cdot 0 + 3.000 \cdot 6 = 23.600$.

Der Koeffizient $(z_3 - g_3) = 4/7$, der zur Schlupfvariablen x_3 gehört (vgl. Tableau III), besagt z.B., daß eine Kapazitätserweiterung der Produktionsfaktorgruppe 1 (Roh-, Hilfsstoffe etc.) um eine Mengeneinheit zu einer Vergrößerung des Gewinns G um 4/7 DM führen würde. Umgekehrt würde eine Gewinnverminderung bei Nichtausnutzung dieser Kapazität um 4/7 DM je Mengeneinheit der Kapazität eintreten. Analog bedeutet der Koeffizient $(z_5 - g_5) = 6$, der zur Schlupfvariablen x_5 gehört (vgl. Tableau III), daß eine Zunahme der Kapazität der Faktorgruppe 3 (Arbeitsstunden) um eine Stunde den Gewinn G um DM 6, – steigern bzw. umgekehrt eine Abnahme der Kapazität um eine Stunde den Maximalgewinn G um DM 6, – verkleinern würde. Da die Schlupfvariable x_4 mit 240 ME in der Basis ist, bedeutet dies, daß die Produktionsfaktorgruppe 2 noch 240 Maschinenstunden Leerzeit (ungenützte Kapazität) hat. Der zugehörige Schattenpreis ist Null, da eine Veränderung der Leerkapazität um eine Stunde keine Veränderung des Optimalgewinnes G bringen kann.

C. Sonderfälle

1. Mehrfachlösungen

Bei Anwendung des Simplexkriteriums wird die Entscheidungszeile mit den $(z_j - g_j)$-Werten überprüft, da diese Schattenpreise eine Verbesserungsmöglichkeit der vorliegenden Lösung anzeigen. Ergibt sich ein Tableau, das in der $(z_j - g_j)$-Zeile für wenigstens eine Nichtbasisvariable Werte Null aufweist, so besitzt das lineare Programmierungsproblem ***unendlich viele optimale Lösungen*** (Mehrfachlösungen). Eine Mehrfachlösung erlaubt den Austausch einer Basisvariablen gegen eine Nichtbasisvariable (mit dem Schattenpreis Null), ohne daß der Zielfunktionswert (G) sich ändert. Diesen von der graphischen Lösung her plausiblen Fall – eine Begrenzungsgerade verläuft in der Isogewinngeraden – erkennt man also daran, daß in einer ersten optimalen Lösung (mit x_1^{opt}) in der $(z_j - g_j)$-Zeile unter mindestens einer Nichtbasisvariablen eine Null auftritt. Durch eine weitere Iteration (Aufnahme einer solchen Nichtbasisvariablen mit Schattenpreis Null in die Basislösung) erreicht man eine zweite optimale Lösung (mit x_2^{opt}). Aus diesen beiden optimalen Lösungen lassen sich dann durch ***Linearkombination beliebig viele optimale Lösungen*** x^{opt} berechnen:

$$x^{opt} = \lambda x_1^{opt} + (1 - \lambda) x_2^{opt} \quad \text{mit } 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

Die Zielfunktion fällt also im Falle der Mehrfachlösungen mit der Verbindungskante zweier benachbarter Extremalpunkte mit x_1^{opt} und x_2^{opt} zusammen; alle Punkte dieser gemeinsamen Geraden (oder auch Hyperebene) sind optimale Lösungen (*Hadley, G.*, 1962, S. 99 f.).

2. Degeneration

Auch die *Degeneration oder Entartung* kann als Mehrfachlösung interpretiert werden. Sie liegt vor, wenn in einer Basislösung mindestens eine Basisvariable den Wert Null annimmt. Die Degeneration tritt auf, wenn bei der Auswahl der Pivotzeile mindestens zwei Quotienten (q_i) bei gegebener Spalte minimal sind, z. B. $b_2 : a_{2k} = b_3 : a_{3k}$. Diese Situation führt im folgenden Tableau dazu, daß Basisvariablen den Wert Null annehmen. Das Ausscheiden dieser Basisvariablen mit dem Wert Null kann nicht zu einer Gewinnsteigerung führen. Degenerationen können zur Folge haben, daß man bei den Iterationen in einen *Zyklus* gerät, der immer wieder dieselbe Reihenfolge von Eckpunktlösungen hervorbringt, d. h. die Rechnung wird immer wieder auf das gleiche Simplextableau zurückgeführt (*Kreiseln*) (*Vazsonyi, A.*, 1962, S. 130 ff.). In der Literatur sind einige Beispiele für degenerierte Lösungen konstruiert worden (*Müller-Merbach, H.*, 1973, S. 116; *Niemeyer, G.*, 1968, S. 138).

Bei degenerierten Lösungen ist eine Sonderregelung einzuführen, um mit der Simplexmethode den Zyklus durchbrechen zu können. Hier gibt es verschiedene Möglichkeiten, die meist auf eine recht aufwendige Erweiterung der Simplexmethode hinauslaufen. Das trifft insbesondere auch für die sog. *„revidierte“* oder *„modifizierte“ Simplexmethode* zu (*Azpeitia, A. G., Dickinson, D. J.*, 1964, S. 329 ff.). „Vom praktischen Standpunkt aus ist die Methode der zufälligen Auswahl am günstigsten“ (*Müller-Merbach, H.*, 1973, S. 116). Hierbei überläßt man die Auswahl der Pivotzeile einem *Zufallsmechanismus* (z.B. mit Hilfe von Zufallszahlen). Durch dieses Vorgehen kann das Kreiseln (unbegrenzt wiederkehrende Tableaufolge) vermieden werden.

Sofern die Degeneration einer Lösung bei den Schlupfvariablen eintritt, deutet das betriebswirtschaftlich auf eine *Harmonisierung der betreffenden Produktionsfaktoren* hin. Die vorhandenen Kapazitäten dieser Produktionsfaktoren (oder Produktionsfaktorgruppen) sind sehr gut aufeinander abgestimmt. Es bleiben hier keine Leerkapazitäten übrig.

3. Unbegrenzte Zielvariable

Es gibt lineare Optimierungsprobleme, für die eine optimale Lösung nicht existiert. Ist das Lösungspolyeder (zulässiger Lösungsraum) bei der Maximierungsaufgabe in Richtung der steigenden Iso-Gewinngeraden nicht begrenzt, gibt es keine optimale Lösung. Die Zielfunktion ist nach oben unbeschränkt (unbeschränkte Lösungen). Der *Zielfunktionswert wächst über alle Grenzen.* Im Simplextableau tritt dieser Fall immer dann auf, wenn in der *Pivotspalte nur nichtpositive Elemente* auftreten. In der Praxis deutet dieser Fall meistens auf eine unvollständige (fehlerhafte) Modellformulierung hin.

Zusammenfassend läßt sich folgendes feststellen:

Anhand der Simplexmethode kann immer bestimmt werden, ob eine lineare Programmierungsaufgabe eine optimale Lösung besitzt oder ob die optimale Lösung

degeneriert ist. Die Simplexmethode erspart eine vorhergehende Prüfung der Voraussetzungen für die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems. Gleichzeitig kann mit Hilfe der Simplexmethode die optimale Lösung zu jeder lösbaren linearen Programmierungsaufgabe ermittelt werden.

D. Probleme mit unzulässiger Ausgangslösung

Das bisher behandelte Optimierungsproblem entsprach dem *Standardansatz einer Maximierungsaufgabe* – auch *Normalform* genannt. Der Standardansatz ist durch nichtnegative Variablen und ausschließlich „$\leqslant$"- (kleiner-gleich-)Bedingungen in den Restriktionen gekennzeichnet. Abweichungen von dieser Normalform bedeuten, daß *anfangs* eine *zulässige Ausgangslösung nicht gegeben* ist, d.h. daß der Koordinatenursprung als Lösungsecke, in der alle Hauptvariablen (Strukturvariablen) Null sind, nicht zum zulässigen Lösungsbereich gehört. In diesem Fall muß zunächst eine zulässige Ausgangslösung ermittelt werden.
Zur Verdeutlichung soll das *Beispiel* (S. 23 ff.) zur Bestimmung eines *optimalen Produktionsprogramms* wie folgt *modifiziert* werden:
Außer den drei Kapazitätsrestriktionen seien noch zwei weitere Nebenbedingungen zu erfüllen:

(1) Aus Konkurrenzgründen müssen von Produkt P_1 mindestens 60 ME in der Planungsperiode bereitgestellt werden;
(2) Der geplante Umsatz, also die Summe aus Erlös je ME multipliziert mit den Verkaufsmengen der jeweiligen Produkte P_1 und P_2, soll DM 42.000 in der Planungsperiode nicht unterschreiten. Der Erlös sei p_1 = DM 210, –/ME bei Produkt P_1 und p_2 = DM 400, –/ME bei Produkt P_2.

Die erste zusätzliche Nebenbedingung lautet:

$$x_1 \geqslant 60$$

Die zweite zusätzliche Nebenbedingung lautet:

$$210 \cdot x_1 + 400 \cdot x_2 \geqslant 42.000$$

Multipliziert man diese beiden zusätzlichen Nebenbedingungen mit minus Eins, so verwandeln sich die beiden „$\geqslant$"-Zeichen in „$\leqslant$"-Zeichen:

$$-x_1 \leqslant -60$$
$$-210x_1 - 400x_2 \leqslant -42.000$$

Damit haben diese beiden Restriktionen die gleiche Form wie die bereits behandelten Kapazitätsrestriktionen. Nach Einführung von zwei weiteren Schlupfvariablen (x_6 und x_7) ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

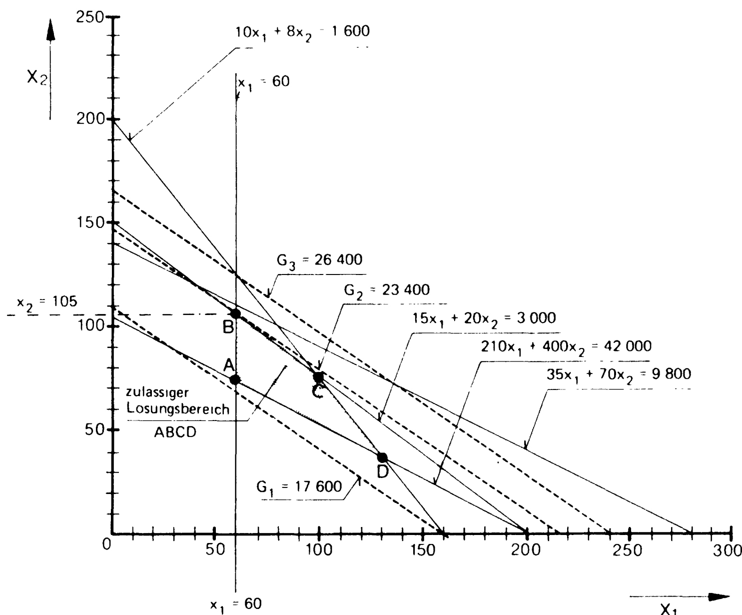
Maximiere $G = 110x_1 + 160x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$

unter den Nebenbedingungen:

$$35x_1 + 70x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 9.800$$
$$10x_1 + 8x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 1.600$$
$$15x_1 + 20x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 3.000$$
$$-x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + x_6 + 0x_7 = -60$$
$$-210x_1 - 400x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + x_7 = -42.000$$

Dabei bezeichnet x_6 die Menge von x_1, die über die geforderte Mindestmenge von 60 ME in der Planungsperiode hinaus erzeugt und abgesetzt wird, und x_7 gibt den Umsatz in DM an, der über die Mindestgrenze von DM 42.000 in der Planungsperiode hinaus erreicht wird. Auch für die beiden neuen Schlupfvariablen gilt die Nichtnegativitätsbedingung (x_6, $x_7 \geqslant 0$). Sind nun in der Ausgangslösung die Hauptvariablen x_1 und x_2 gleich Null, so sind $x_6 = -60$ und $x_7 = -42.000$. Die *Nichtnegativitätsbedingung* ist also für diese beiden Schlupfvariablen ***nicht erfüllt***. Die *Ausgangslösung* (Nullprogramm) ist mithin ***unzulässig***.
In der Abb. 4 ist das Problem mit den beiden zusätzlichen „$\geqslant$"-Bedingungen gezeichnet; sie zeigt, daß der zulässige Lösungsbereich (konvexes Polyeder ABCD einschließlich Begrenzungsgeraden) gegenüber der Abb. 2 stark zusammengeschrumpft ist. Von besonderer Bedeutung ist dabei, daß der zulässige Bereich den Koordinatenursprung ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) nicht mehr einschließt. Im übrigen ist erkennbar, daß die erste Kapazitätsrestriktion – nämlich die Begrenzung durch die Produktionsfaktorgruppe 1 (Werkstoffe) – mit der Ungleichung $35x_1 + 70x_2 \leqslant 9.800$ durch die Modellerweiterung redundant geworden ist (die entsprechende Begrenzungsgerade tangiert nicht mehr den zulässigen Lösungsbereich).

Abb. 4: Graphische Lösung des kombinierten Produktions- und Absatzprogramms – modifizierte lineare Maximierungsaufgabe



1. Zwei-Phasen-Verfahren zur Bestimmung einer zulässigen Ausgangslösung

Das *Zwei-Phasen-Verfahren* (*Krelle, W., Künzi, H. P.*, 1958, S. 64 ff., *Hadley, G.*, 1962, S. 149 ff.) nimmt in der *Phase 1* eine *Programmierung durch den negativen Bereich* vor. Mit der Simplexmethode ist zunächst eine Lösung im zulässigen Bereich anzustreben, soweit überhaupt eine zulässige Lösung existiert. In der *Lösungsphase 1* wird also eine ***unzulässige Ausgangslösung in eine zulässige überführt.*** Erst in der *Phase 2 (Optimierungsphase)* versucht man, die *optimale Lösung* zu bestimmen. Phase 1 und Phase 2 unterscheiden sich lediglich in den Auswahlkriterien für die Pivotspalte und Pivotzeile. Die übrigen Rechenregeln (zur Umformung des linearen Gleichungssystems) sind die gleichen.

a) Phase 1: Überführung einer unzulässigen Ausgangslösung in eine zulässige

Für die *Auswahl der Pivotspalte und Pivotzeile* in der *Phase 1* gibt es eine Reihe von verschiedenen Regeln. Wir wollen hier eine einzige *Auswahlregel* erläutern, die zum einen sehr einfach und zum anderen relativ schnell zu einer zulässigen Lösung führt. Die Vorgehensweise soll an dem erweiterten Beispiel (Optimierung eines *kombinierten Produktions- und Absatzprogrammes)* erörtert werden:

Tabelle 5: Tableau I – Unzulässiges Simplex-Ausgangstableau (unzulässige „Nullösung")

x_B	g_i \ Variablen	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RS (b_i)
x_3	0	35	70	1	0	0	0	0	9.800
x_4	0	10	8	0	1	0	0	0	1.600
x_5	0	15	20	0	0	1	0	0	3.000
x_6	0	(−1)	0	0	0	0	1	0	−60
x_7	0	−210	−400	0	0	0	0	1	−42.000
g_j		110	160	0	0	0	0	0	–
$z_j - g_j$		−110	−160	0	0	0	0	0	G = 0

Die negativen Elemente in der „RS"-Spalte (b_i-Werte) kennzeichnen jeweils eine *Verletzung der Nichtnegativitätsbedingung.* D.h. die Werte der entsprechenden Basisvariablen sind in dieser Lösung negativ, und die zugehörige Restriktion ist nicht erfüllt. In der Ausgangslösung (Tableau I) sind dies die Basisvariablen $x_6 = -60$ *und* $x_7 = -42.000$. Es ist nun durch *Austausch der negativen Basisvariablen* eine zulässige Lösung anzustreben. Pro Iteration kann je eine negative Basisvariable zur Erfüllung der Nichtnegativitätsbedingung gezwungen werden. Dies geschieht dadurch,

daß man jeweils eine negative Basisvariable aus der Basis entfernt, und sie somit als Nichtbasisvariable dann den Wert Null annimmt. Damit ist aber zugleich die Nichtnegativität für die fragliche Variable erreicht.

Man *wählt* in der *Phase 1 zunächst* die *Pivotzeile*. Sie kann beliebig unter den Zeilen mit einem negativen *Element* in der *„RS"-Spalte* gewählt werden. Dieses unsystematische Rechnen durch den negativen Bereich kann den Rechenaufwand allerdings erhöhen. Beispielsweise kann man die oberste Zeile mit einer negativen Basisvariablen wählen. Das wäre im Beispiel die Zeile p = 4 mit der Basisvariablen $x_6 = -60$. Man könnte nun in der gewählten Auswahlzeile (Pivotzeile p) jedes Element als Pivotelement wählen, das von Null verschieden ist ($a_{pk} \neq 0$). Die aus der Basis verschwindende (zur Nichtbasisvariablen werdende) Variable wird auf jeden Fall Null (also nichtnegativ). Ist das Pivotelement aber positiv ($a_{pk} > 0$), so wäre die neue Basisvariable wieder negativ und die Nichtnegativitätsbedingung weiterhin verletzt. Damit wäre kein Fortschritt erzielt. Das *Pivotelement muß* also *in* der *Phase 1 negativ* sein ($a_{pk} < 0$). Sind mehrere negative Elemente in der Pivotzeile vorhanden, kann wiederum ein beliebiges für die Auswahl der Pivotspalte gewählt werden. Um ein eventuelles *Kreiseln* zu vermeiden, kann mit Hilfe eines Zufallsmechanismus bestimmt werden, welche Spalte als Pivotspalte gewählt wird (vgl. auch Seite 52).

In unserem Beispiel hat nur die Spalte k = 1 ein negatives Element in der Pivotzeile p = 4, so daß $a_{41} = -1$ das Pivotelement ist (durch einen Kreis im Tableau I markiert). Unter Anwendung der beschriebenen Rechenregeln erhält man eine weitere unzulässige Lösung (Austausch der Basisvariablen x_6 gegen die Nichtbasisvariable x_1), die allerdings nur noch eine *Verletzung* der *Nichtnegativitätsbedingung* aufweist (Tableau II):

Tabelle 6: Tableau II – Lösung nach der 1. Iteration in Phase 1

x_B	g_i \ Variablen	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RS (b_i)
x_3	0	0	70	1	0	0	35	0	7.700
x_4	0	0	8	0	1	0	10	0	1.000
x_5	0	0	20	0	0	1	15	0	2.100
→ x_1	110	1	0	0	0	0	−1	0	60
x_7	0	0	(−400)	0	0	0	−210	1	−29.400
$z_j - g_j$		0	−160	0	0	0	−110	0	G = 6.600

Das zweite Tableau gibt das noch nicht zulässige kombinierte Produktions- und Absatzprogramm mit $x_1 = 60$, $x_2 = 0$ an, dabei sind die Kapazitäts- und die Absatzmengenrestriktionen erfüllt, nicht dagegen die Umsatzrestriktion ($x_7 = -29.400$).

Durch das negative Element in der „RS"-Spalte wird nun in der zweiten Iteration der Phase 1 die *Pivotzeile* p = 5 bestimmt. Als *Pivotspalte* kommen die Spalten zwei oder sechs in Frage, da nur hier negative Koeffizienten vorliegen. Durch eine Zufallsauswahl werde die Spalte k = 2 als Pivotspalte und somit $a_{52} = -400$ als Pivotelement bestimmt (das Pivotelement ist wiederum durch einen Kreis im Tableau II markiert). Mit der gewählten Pivotzeile und Pivotspalte erhält man das nachstehende Tableau III:

Tabelle 7: Tableau III – Lösung nach der 2. Iteration in Phase 1

x_B	g_i \ Variablen	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RS (b_i)	q_i
x_3	0	0	0	1	0	0	−1,75	0,175	2.555	–
x_4	0	0	0	0	1	0	(5,8)	0,02	412	412/5,8 = 71,03
x_5	0	0	0	0	0	1	4,5	0,05	630	630/4,5 = 140
x_1	110	1	0	0	0	0	−1	0	60	–
→ x_2	160	0	1	0	0	0	0,525	−0,0025	73,5	73,5/0,525 = 140
$z_j - g_j$		0	0	0	0	0	−26	−0,4	G = 18.360	

Nach der zweiten Iteration in der Phase 1 ist eine *erste zulässige Ausgangslösung* erreicht. Die Zulässigkeit erkennt man daran, daß die Nichtnegativitätsbedingungen ($x_1, x_2, \ldots, x_7 \geqslant 0$) erfüllt sind – d.h. alle Elemente der rechten Seite („RS"-Spalte) sind nichtnegativ – und daß weiterhin die zulässige Ausgangslösung alle übrigen Nebenbedingungen erfüllt; es werden $x_1 = 60$ und $x_2 = 73{,}5$ ME der beiden Punkte P_1 und P_2 produziert. Der Gewinn dieses Programms beträgt DM 18.360. Diese Lösung entspricht dem Eckpunkt A des zulässigen Lösungsraumes in Abb. 4.
Da nunmehr eine erste zulässige Ausgangslösung für das Problem vorliegt, ist das Ziel der Phase 1 erreicht. Man geht dann in die Optimierungsphase (Phase 2) und versucht, das optimale Programm zu bestimmen.

b) Phase 2: Optimierung des Programms

In der *Optimierungsphase* kommen die Schritte 2 bis 6 (vgl. S. 48 f.) der Vorgehensweise nach der Simplexmethode unverändert zur Anwendung.
Da in der ($z_j - g_j$)-Zeile (Entscheidungszeile) des Tableaus III noch negative Koeffizienten vorhanden sind – vgl. Spalte 6 und 7 –, ist die gefundene zulässige Ausgangslösung noch nicht optimal (Simplexkriterium). Es folgen die Schritte 3 bis 6.
Man wählt die Pivotspalte z.B. nach der „Steepest Unit Ascent"-Version und anschließend die Pivotzeile. Sobald die Entscheidungszeile keine negativen Elemente mehr enthält, ist die Optimallösung gefunden.

In unserem Beispiel ist $(z_6 - g_6) = -26$ das absolut größte negative Element in der Entscheidungszeile, so daß die Spalte k = 6 die Auswahlspalte (Pivotspalte) ist. Die entsprechende Nichtbasisvariable x_6 soll in der nächsten Iteration in die Basis eingeführt werden.

Als Pivotzeile ist die mit dem kleinsten Quotienten $q_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$ (für $a_{ik} > 0$) zu wählen, das ist im Beispiel die Zeile p = 2; Pivotelement ist $a_{26} = 5{,}8$ (vgl. kreisförmige Markierung in Tableau III). In der ersten Iteration der Phase 2 (Optimierungsphase) ist also die Nichtbasisvariable x_6 in die Lösung einzuführen und die Basisvariable x_4 aus der Basis herauszunehmen:

Tabelle 8: Tableau IV – Lösung nach der 1. Iteration in Phase 2

	x_B \ Variablen	g_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RS (b_i)	q_i
	x_3	0	0	0	1	0,3017	0	0	0,18104	2.679,31	14.799,55
→	x_6	0	0	0	0	0,1724	0	1	0,00345	71,0345	20.589,71
	x_5	0	0	0	0	−0,7758	1	0	(0,03447)	310,3457	9.002,05
	x_1	110	1	0	0	0,1724	0	0	0,00345	131,0345	37.981,01
	x_2	160	0	1	0	−0,0905	0	0	−0,00431	36,2069	–
	$z_j - g_j$		0	0	0	4,4824	0	0	−0,3103	G = 20.206,90	

Nach der ersten Iteration in der Optimierungsphase ist eine Lösung mit $x_1 = 131{,}03$, $x_2 = 36{,}21$ ME und einem Gewinn von G = 20.206,90 DM erreicht (= Lösung für den Eckpunkt D in Abb. 4). Sie ist noch nicht optimal, da noch ein Element in der Entscheidungszeile $(z_7 - g_7 = -0{,}3103)$ negativ ist. Das neue Pivotelement ist $a_{37} = 0{,}03447$ (vgl. die Kreismarkierung in Tableau IV). In der zweiten Iteration der Phase 2 wird x_7 in die Lösung aufgenommen und x_5 wird zur Nichtbasisvariablen:

Tabelle 9: Tableau V – Lösung nach der 2. Iteration in Phase 2

	x_B \ Variablen	g_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	(RS) (b_i)	q_i
	x_3	0	0	0	1	4,3757	0	0	0	1.049,58	239,87
	x_6	0	0	0	0	(0,25)	−0,1	1	0	39,977	159,91
→	x_7	0	0	0	0	−22,5033	29,0065	0	1	9.002,05	–
	x_1	110	1	0	0	0,25	0,1	0	0	99,977	400
	x_2	160	0	1	0	−0,1875	0,125	0	0	75,015	–
	$z_j - g_j$		0	0	0	−2,5	9,0	0	0	G = 23.000	

Nach der zweiten Iteration in der Optimierungsphase lautet die Lösung $x_1 = 100$, $x_2 = 75$ ME und G = 23.000 DM. Sie ist die Lösung für den Eckpunkt C in Abb. 4. Diese Lösung ist noch nicht optimal, da noch ein Element der Entscheidungszeile ($z_4 - g_4 = -2{,}5$) negativ ist. Das neue Pivotelement ist $a_{24} = 0{,}25$ (vgl. die Kreismarkierung – Tableau V). In der nächsten Iteration wird x_4 in die Lösung eingeführt und dafür x_6 aus der Lösung herausgenommen:

Tabelle 10: Tableau VI – Lösung nach der 3. Iteration in Phase 2 – Optimallösung

x_B	g_i \ Variablen	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RS (b_i)
x_3	0	0	0	1	0	−1,7503	−17,5028	0	350
→ x_4	0	0	0	0	1	−0,4	4	0	160
x_7	0	0	0	0	0	38,0078	90,0132	1	12.600
x_1	110	1	0	0	0	0	−1	0	60
x_2	160	0	1	0	0	0,2	0,75	0	105
$z_j - g_j$		0	0	0	0	8,0	10,0	0	G = 23.400

Die Lösung nach der dritten Iteration in der Optimierungsphase (vgl. Tableau VI) wird anhand des Simplexkriteriums auf ihre Optimalität hin geprüft. Da alle Elemente der Entscheidungszeile (Schattenpreise $z_j - g_j \geqslant 0$ für alle j) nichtnegativ sind, gibt es keine Verbesserungsmöglichkeit mehr. Das *optimale kombinierte Produktions- und Absatzprogramm* ist ermittelt; es entspricht der Lösung für den Eckpunkt B in Abb. 4.

Die Optimallösung lautet (vgl. Tableau VI):

$$x_1 = 60, x_2 = 105, x_3 = 350, x_4 = 160, x_5 = 0, x_6 = 0, x_7 = 12.600$$

mit $G = 110 \cdot 60 + 160 \cdot 105 = 23.400.$

Ökonomisch interpretiert bedeutet dies, daß der Betrieb unter den gegebenen Umständen als kurzfristigen Plan folgendes *optimale Programm* realisieren wird:

Die aus Absatzgründen geforderte *Mindestmenge* von P_1 mit 60 ME wird in das Produktionsprogramm übernommen. Der zur Schlupfvariablen x_6 gehörende Koeffizient $(z_6 - g_6) = 10$ (= Schattenpreis für die Absatzrestriktion) besagt, daß eine Verringerung der Mindestabsatzmenge für P_1 um eine Mengeneinheit den Gewinn G um DM 10,– steigern würde. Die Schlupfvariable x_6 ist als Nichtbasisvariable Null, da die Absatzrestriktion einen Engpaß bildet.

Von Produkt P_2 werden 105 ME gefertigt und stehen für den Absatz zur Verfügung. Der Koeffizient $(z_5 - g_5) = 8$, der zur Schlupfvariablen x_5 gehört (vgl. Tableau VI), bedeutet analog, daß eine Zunahme der Kapazität der Faktorgruppe 3 (Arbeitsstunden) um eine Stunde den Gewinn G um DM 8,– steigern bzw. umgekehrt eine Abnahme der Kapazität um eine Stunde den Maximalgewinn G um DM 8,– verkleinern würde. Die Schlupfvariable x_5 ist ebenfalls als Nichtbasisvariable Null, da die vorhandene Kapazität an Arbeitsstunden einen Engpaß bildet.

Da die Schlupfvariablen x_3, x_4 und x_7 mit positiven Werten in der Basis sind, bedeutet dies,

daß hier noch Leerkapazitäten (x_3 = 350 ME überschüssige Materialkapazität und x_4 = 160 Maschinenstunden Leerzeit) bzw. der geforderte Mindestumsatz von DM 42.000 um x_7 = DM 12.600 überschritten wird (der erreichbare Umsatz des Optimalprogramms beträgt DM 54.600 und übersteigt damit den geforderten Mindestumsatz um DM 12.600, –).
Da der Schattenpreis die Änderung der Zielgröße G bei Veränderung der zugehörigen Restriktion um eine Einheit angibt, kann der Gewinn im Optimum auch als Summe der Produkte aus allen Kapazitäten bzw. Anforderungsgrößen mit ihren Schattenpreisen bestimmt werden; im Beispiel:

$G = 9.800 \cdot 0 + 1.600 \cdot 0 + 3.000 \cdot 8{,}0 + (-60) \cdot 10 + (-42.000) \cdot 0 = 23.400.$

2. *M-Methode zur Bestimmung einer zulässigen Ausgangslösung bei Gleichungen als Restriktionen*

Neben den bereits behandelten Ungleichungen können in einem System von Restriktionen auch *Gleichungen als Nebenbedingungen* auftreten. So könnte z.B. eine ganz bestimmte – vertraglich festgelegte – Menge eines Produktes gefertigt werden müssen. Oder es könnten Produkte nur in einem bestimmten konstanten Verhältnis aus einem Fertigungsprozeß hervorgebracht werden können (Kuppelproduktion). Während man *Ungleichungen* durch *Addition* von *Schlupfvariablen* in *Gleichungen* umwandelt, scheint zunächst das Einfügen von Schlupfvariablen bei Gleichungen nicht erforderlich zu sein.
Bei Anwendung der Simplexmethode haben die Schlupfvariablen in der Ausgangslösung (Nullösung) aber auch die Aufgabe, Basisvariablen zu sein. Damit die Hauptvariablen (Strukturvariablen) in der Nullösung den Wert Null annehmen können, müssen die Schlupfvariablen gleich dem Wert der rechten Seite (b_i) sein. Unter diesen Voraussetzungen ist das mit Hilfe der Einführung der Schlupfvariablen gebildete Gleichungssystem in der Ausgangslösung erfüllt. Dagegen ist eine Gleichung, die nur Hauptvariablen enthält, in der Ausgangslösung (Nullösung) im allgemeinen nicht erfüllt; ausgenommen bleibt der Fall, daß der Wert der rechten Seite der Gleichung Null ist ($b_i = 0$). Um nun dennoch zu einer *ersten zulässigen Basislösung* (Ausgangslösung) zu gelangen, ist es empfehlenswert, jeder Gleichung – ebenso wie jeder Ungleichung – eine Schlupfvariable (x_{n+i}) zuzuordnen. Diese *künstlichen Schlupfvariablen* dürfen auf keinen Fall Basisvariablen der Optimallösung sein, da andernfalls die Gleichheitsbedingungen verletzt wären. Eine Lösung ist nur dann zulässig, wenn diese künstlichen Schlupfvariablen den Wert *Null annehmen* (als Nichtbasisvariablen), d.h. nicht mehr Basisvariablen sind. Um dies sicherzustellen, werden diese künstlichen Schlupfvariablen mit einem *Sperrvermerk* versehen (*gesperrte Schlupfvariablen*). Durch den Sperrvermerk sind sie als *unzulässige Basisvariablen* gekennzeichnet.
Zunächst nimmt man diese gesperrten Schlupfvariablen wie jede andere Schlupfvariable in die erweiterte Zielfunktion auf. Sie erhalten in der Zielfunktion aber nicht den Wert Null, wie dies bei jeder anderen Schlupfvariablen der Fall ist, sondern einen *sehr hohen*, nicht näher zu konkretisierenden *Wert* mit negativen Vorzeichen (Maximierungsaufgabe). Dieser Zielfunktionskoeffizient wird im allgemeinen mit „*M*" gekennzeichnet; dies erklärt die Bezeichnung der *M-Methode*. Es handelt sich hierbei um die sog. „Artificial-Basis-Technique", die von *Krelle* und

Künzi als „M-Methode“ bezeichnet wurde (vgl. *Krelle, W., Künzi, P.*,1958, S. 63 ff.; *Angermann, A.*, 1963, S. 211 ff.). Im übrigen bleibt der Simplex-Algorithmus unberührt. Mit diesem M wird in den Simplextableaus wie mit jeder anderen reellen Zahl gerechnet.

Die Zielfunktionskoeffizienten M der gesperrten Schlupfvariablen gewährleisten, daß die gesperrten (künstlichen) Schlupfvariablen im Verlaufe der Optimierungsrechnung mit Priorität aus der Lösung verdrängt werden. Als Nichtbasisvariablen haben sie den Wert Null und stören die optimale Lösung nicht. Damit ist die Vorgehensweise der M-Methode bereits angedeutet: Die *Auswahlregel* für die *Pivotzeile* p lautet: Solange noch gesperrte Schlupfvariablen als Basisvariablen auftreten, ist als Pivotzeile eine *Zeile mit* einer *gesperrten Schlupfvariablen* zu *wählen.* Als *Pivotspalten* k sind nur solche zu wählen, deren *Nichtbasisvariablen keine gesperrten Schlupfvariablen* sind. Darüber hinaus ist es erforderlich, daß sich die Auswahlspalte mit der Pivotzeile in einem von Null verschiedenen Pivotelement schneiden.

An einem *Beispiel* soll die *Rechentechnik* der *M-Methode* dargestellt werden (in Anlehnung an ein Beispiel bei *Angermann, A.*,1963, S. 213 ff.):

Ein Betrieb kann von den vier Produkten P_1, P_2, P_3 und P_4 in einem Monat die Mengen x_1, x_2, x_3 und x_4 herstellen. Jedes dieser vier Produkte muß alle oder zwei der drei vorhandenen Fertigungsanlagen F_1, F_2 und F_3 durchlaufen. Dabei sind P_3 und P_4 Produkte, die ausschließlich von einem Abnehmer im Verhältnis 2:3 weiterverarbeitet werden. Die Produktion soll so erfolgen, daß der Gewinn maximiert wird. Die Zahlenangaben sind in folgender Tabelle zusammengefaßt:

Tabelle 11: Daten zum Optimierungsproblem

Produkte		P_1	P_2	P_3	P_4	
Menge		x_1	x_2	x_3	x_4	
Deckungsbeitrag [DM/ME]		200,–	100,–	300,–	800,–	Monatliche Kapazität [h]
Fertigungszeit in [h/ME] auf der Fertigungs-anlage	F_1	3	1	4	5	600
	F_2	0	2	3	4	900
	F_3	1	0	1	2	300

Außer der Zielfunktion und den drei Kapazitätsrestriktionen ist nun noch die Verknüpfung der beiden Produkte P_3 und P_4 zu beachten, da beide nur im Verhältnis $x_3 : x_4 = 2:3$ verkauft werden können. Also kommt die Nebenbedingung $3x_3 = 2x_4$ hinzu, die man zweckmäßig in $3x_3 - 2x_4 = 0$ umwandelt. Durch *Einfügen* einer *gesperrten Schlupfvariablen* x_8 bringt man sie in die für das Simplex-Tableau erforderliche Form, in der jede Zeile durch eine Basisvariable repräsentiert wird, deren Wert durch den entsprechenden Wert der rechten Seite der Gleichung gegeben ist. Die gesperrte Schlupfvariable x_8 darf jedoch in der Optimallösung nicht mehr in der Basis sein.

Das Gleichungssystem lautet:

Maximiere $G = 200x_1 + 100x_2 + 300x_3 + 800x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + (-M)x_8$

unter den Nebenbedingungen:

$$3x_1 + 1x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 = 600$$
$$0x_2 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_6 = 900$$
$$1x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 2x_4 + x_7 = 300$$
$$3x_3 - 2x_4 + x_8 = 0$$

Damit die gesperrte Schlupfvariable möglichst bald aus der Basis verdrängt wird, ist ihr ein sehr großer negativer Deckungsbeitrag $g_8 = -M$ zugeordnet. Da die Differenz $(z_8 - g_8)$ in der Entscheidungszeile immer positiv sein muß, gelangt die gesperrte Schlupfvariable nicht mehr in die Basis, wenn sie erst einmal Nichtbasisvariable ist. Die Koeffizienten zu den Variablen x_3, x_4 und x_8 in der $(z_j - g_j)$-Zeile errechnen sich wie folgt:

$$z_3 - g_3 = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 3(-M) - 300 = -3M - 300$$
$$z_4 - g_4 = 5 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + (-2)(-M) - 800 = 2M - 800$$
$$z_8 - g_8 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1(-M) - (-M) = 0$$

Tabelle 12: Tableau I – Simplex-Tableau der Ausgangslösung (Nullösung)

x_B	g_i (Variablen)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8 (gesperrt)	RS (b_i)
x_5	0	3	1	4	5	1	0	0	0	600
x_6	0	0	2	3	4	0	1	0	0	900
x_7	0	1	0	1	2	0	0	1	0	300
x_8 (gesperrt)	−M	0	0	(3)	−2	0	0	0	1	0
$z_j - g_j$		−200	−100	−3M −300	2M −800	0	0	0	0	G = 0

Gemäß Auswahlregel der M-Methode ist als ***Pivotzeile*** diejenige Zeile zu wählen, in der noch eine ***gesperrte Schlupfvariable*** als Basisvariable auftritt; das ist die vierte Zeile (p = 4). Als ***Pivotspalte*** ist eine Spalte mit einer ***nicht gesperrten Variablen*** zu wählen und das ***Pivotelement*** darf ***nicht Null*** sein ($a_{pk} \neq 0$). Da es zunächst nur darauf ankommt, die gesperrte Schlupfvariable als Basisvariable zu eliminieren, ist es prinzipiell gleichgültig, welche Spalte (im Beispiel Spalte 3 oder 4) als Pivotspalte gewählt wird. Die Spalte 3 möge als Pivotspalte ausgewählt sein, so daß $a_{43} = 3$ das Pivotelement ist:

Tabelle 13: Tableau II – Lösung nach der 1. Iteration

x_B	g_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8 (gesperrt)	RS (b_i)	q_i
x_5	0	3	1	0	(23/3)	1	0	0	−4/3	600	1800/23 = 78,26
x_6	0	0	2	0	6	0	1	0	−1	900	150
x_7	0	1	0	0	8/3	0	0	1	−1/3	300	900/8 = 112,5
→ x_3	300	0	0	1	−2/3	0	0	0	1/3	0	
$z_j - g_j$		−200	−100	0	−1.000	0	0	0	M + 100	G = 0	

Die zweite Basislösung entspricht der ersten; die Hauptvariablen x_1, x_2, x_3 und x_4 sind Null, also ist auch der Deckungsbeitrag noch Null (G = 0). Da die *gesperrte Variable* x_8 *jetzt Nichtbasisvariable* ist, hat sie automatisch den Wert *Null* angenommen, was die Bedingung dafür ist, daß die vierte Gleichung erfüllt ist. Da die Spalte der gesperrten Variablen nie wieder als Pivotspalte gewählt werden würde, hat sie für die weitere Lösungsfindung eigentlich keine Bedeutung mehr; sie könnte daher ab jetzt weggelassen werden.
Nach der „Steepest Unit Ascent"-Version wird nun die Spalte 4 als Pivotspalte gewählt. Pivotelement ist $a_{14} = 23/3$. In der zweiten Iteration wird also x_4 zur Basisvariablen und x_5 zur Nichtbasisvariablen:

Tabelle 14: Tableau III – Lösung nach der 2. Iteration – Optimallösung

x_B	g_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8 (gesperrt)	RS (b_i)
→ x_4	800	9/23	3/23	0	1	3/23	0	0	−4/23	78,26
x_6	0	−54/23	28/23	0	0	−18/23	1	0	1/23	430,43
x_7	0	− 1/23	−8/23	0	0	− 8/23	0	1	3/23	91,31
x_3	300	6/23	2/23	1	0	2/23	0	0	5/23	52,17
$z_j - g_j$		191,30	30,43	0	0	130,43	0	0	M−73,91	G = 78.260

Nach der zweiten Iteration befinden sich zwei Hauptvariablen ($x_3 = 52{,}17$ und $x_4 = 78{,}26$) in der Lösung. Da alle Koeffizienten in der Entscheidungszeile nichtnegativ sind ($z_j - g_j \geqslant 0$), handelt es sich bereits um die *Optimallösung*. Sie lautet (vgl. Tableau III):

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 52{,}17,\ x_4 = 78{,}26,\ x_5 = 0,\ x_6 = 430{,}43,$$
$$x_7 = 91{,}31,\ x_8 = 0 \text{ mit } G = 78.260$$

Ökonomisch interpretiert bedeutet dies, daß der Betrieb unter den gegebenen Umständen als Monatsplan folgendes optimale Programm realisieren kann:
Er fertigt nur Produkt P_3 und P_4 mit 52,17 bzw. 78,26 ME. Die Produkte P_1 und P_2 gelangen hingegen nicht in das Programm (x_1 und x_2 sind Nichtbasisvariablen, also gleich Null).
Der *Schattenpreis von DM 191,30*, der zu x_1 gehört ($z_1 - g_1 = 191{,}30$), besagt, daß die Herstellung von einer ME von P_1 ($x_1 = 1$) den Gesamtdeckungsbeitrag um DM 191,30 verkleinern würde. Begründung: In dem optimalen Programm stellt nur die Fertigungsanlage F_1 den Engpaß dar. Dies erkennt man daran, daß nur die Schlupfvariable x_5, die zur Kapazität F_1 gehört, als Nichtbasisvariable Null ist. Würde nun in dem Produktionsprogramm *eine ME von P_1* gefertigt werden, so würde dies die Engpaßkapazität F_1 mit 3h belasten (vgl. Tabelle 11). Diese 3 Maschinenstunden müßten der Fertigung von P_3 und P_4 entzogen werden. Bezeichnet man die Abnahme der Fertigungsmenge von P_3 mit Δx_3 und von P_4 mit Δx_4, so ergibt sich auf Grund der technischen Koeffizienten für diese Produkte auf der Fertigungsanlage F_1 (vgl. Tabelle 11) folgende Reduzierung:

(1) $$-3 = 4\Delta x_3 + 5\Delta x_4$$

Da zwischen P_3 und P_4 eine Verknüpfung im Verhältnis 2:3 besteht, muß die Reduzierung diese Bedingung einhalten:

(2) $$3\Delta x_3 = 2\Delta x_4 \quad \text{bzw.} \quad \Delta x_3 = 2/3\,\Delta x_4$$

Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich Δx_3 und Δx_4 durch Einsetzen bestimmen: zunächst (2) in (1):

$$-3 = 4 \cdot 2/3\,\Delta x_4 + 5\,\Delta x_4$$

(1') $$-3 = 23/3\,\Delta x_4; \qquad \underline{\Delta x_4 = -\frac{9}{23}}$$

(2') $$\Delta x_3 = 2/3 \cdot (-9/23); \quad \underline{\Delta x_3 = -\frac{6}{23}}$$

Die Aufnahme einer ME von P_1 erhöht den Deckungsbeitrag um DM 200, –. Die dadurch erzwungene Abnahme der Fertigung von P_3 um 6/23 und P_4 um 9/23 ME reduziert hingegen den Deckungsbeitrag um (6/23 · 300 + 9/23 · 800) DM 391,30. Damit ergäbe sich per Saldo eine Abnahme des Deckungsbeitrages um (200, – ./. 391,30) DM 191,30. Dies entspricht dem Schattenpreis bezüglich x_1.
Der *Schattenpreis von DM 30,43*, der zu x_2 gehört ($z_2 - g_2 = 30{,}43$), besagt entsprechend, daß die Herstellung einer ME von P_2 ($x_2 = 1$) den Gesamtdeckungsbeitrag um DM 30,43 vermindern würde. Die Begründung wäre analog.
Da die Schlupfvariable x_5 als Nichtbasisvariable Null ist, stellt – wie bereits festgestellt – die Fertigungsanlage F_1 den *Engpaß* dar (vgl. Tableau III). Der zugehörige *Schattenpreis* $z_5 - g_5 =$ *130,43 DM* kann zur *Bewertung des Engpasses* herangezogen werden: Gelänge es dem Betrieb, die Kapazität der Fertigungsanlage F_1 um *eine ME* (Maschinenstunde) zu vergrößern, so würde der Gesamtdeckungsbeitrag um DM 130,43 steigen. Die Begründung lautet: Man könnte diese zusätzliche Fertigungsstunde der Anlage F_1 zur Herstellung von P_3 und P_4 verwenden. Auf Grund der technischen Koeffizienten (vgl. Tabelle 11) ergibt sich:

(1) $$1 = 4\Delta x_3 + 5\Delta x_4$$

Wegen der mengenmäßigen Verknüpfung von P_3 und P_4 gilt weiter:

(2) $$3\Delta x_3 = 2\Delta x_4$$

Aus diesen beiden Gleichungen läßt sich x_3 mit 2/23 und Δx_4 mit 3/23 ME bestimmen. Daraus errechnet sich ein zusätzlicher Deckungsbeitrag von (2/23 · 300 + 3/23 · 800) DM 130,43. Dies entspricht wiederum den Opportunitätskosten (Schattenpreis) bezüglich x_5. Dabei sind die proportionalen Kosten für die Bereitstellung der zusätzlichen Fertigungsstunde auf F_1 als konstant unterstellt.

Die übrigen Kapazitäten F_2 und F_3 sind nicht ausgelastet, und zwar weist F_2 eine *Leerkapazität* von $x_6 = 430{,}43$ h, F_3 eine solche von $x_7 = 91{,}31$ h im Monat (Planungszeitraum) auf (vgl. Tableau III). Entsprechend sind die zugehörigen Schattenpreise Null.
Der maximale Deckungsbeitrag beträgt: $G = 52{,}17 \cdot 300 + 78{,}26 \cdot 800 = 78.259$; gerundet DM 78.260. Oder mit Hilfe der Schattenpreise: $G = 130{,}43 \cdot 600 + 0 \cdot 900 + 0 \cdot 300 = 78.258$; gerundet DM 78.260.

3. *Freie Variablen und ihre Behandlung*

Als *„freie Variablen"* werden solche bezeichnet, für die die *Nichtnegativitätsbedingung nicht gilt.* Freie Variablen können also positive und negative Werte annehmen; sie werden auch als *im Vorzeichen unbeschränkte Variablen* bezeichnet. Die Simplexmethode erzwingt grundsätzlich für alle Variablen die Nichtnegativität. Im allgemeinen ist diese implizite Berücksichtigung der Nichtnegativitätsbedingungen erwünscht, weil die Nichtnegativität der Variablen sinnvoll oder notwendig ist. Es gibt jedoch reale Situationen, in denen für alle oder einzelne Variablen keine Vorzeichenbeschränkung besteht. Die unveränderte Anwendung der Simplexmethode hätte in diesem Fall die gleiche Wirkung wie die Einführung einer Nichtnegativitätsbedingung. Das könnte eine Verfälschung der Lösung bedeuten.
Freie Variablen sind stets in Basisvariable zu verwandeln. Das bedeutet, daß man in den ersten Iterationen versucht, alle Nichtbasisvariablen, die freie Variablen darstellen, in die Lösung aufzunehmen. Hierbei gelten die beschriebenen Rechenregeln der Simplex-Methode. Lediglich die *Auswahlkriterien* für die *Pivotspalte* und *Pivotzeile* sind anders: Als Pivotspalte wählt man jeweils die Spalte, deren Nichtbasisvariable eine freie Variable ist. Als Pivotzeile kann eine beliebige Zeile gewählt werden, deren zugehörige Basisvariable nicht frei ist und die sich mit der Pivotspalte in einem von Null verschiedenen Pivotelement ($a_{pk} \neq 0$) schneidet (*Lazak, D.*, 1973, S. 76). Die Vorgehensweise entspricht methodisch der Phase 1 des beschriebenen *Zwei-Phasen-Verfahrens* zur Bestimmung einer zulässigen Ausgangslösung bei Verletzung der Nichtnegativitätsbedingung.
Ist eine freie Variable nach der Phase 1 in der Lösung, so darf ihre Zeile nicht mehr als Pivotzeile gewählt werden. Es kann sinnvoll sein, schon in der Ausgangslösung die freien Variablen zu Basisvariablen zu verwandeln; diese haben dann keinen Einfluß auf die Lösung. Vielmehr dienen sie meistens gewissen Nebenrechnungen und Interpretationszwecken (*Müller-Merbach, H.*, 1973, S. 128 ff.). Auch die Basisvariable der Zielfunktion ist z. B. formal als freie Variable zu interpretieren. Sie nimmt an allen Iterationen teil, wird aber niemals Pivotzeile. Bei linearen Gleichungssystemen sind alle Entscheidungsvariablen freie, d. h. im Vorzeichen unbegrenzte Variablen. Darüber hinaus sind alle Restriktionen Gleichungen, deren Schlupfvariablen gesperrte Variablen sind.

4. *Beispiel zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit Hilfe der Simplexmethode*

Zur Lösung eines *linearen Gleichungssystems* mit Hilfe der *Simplexmethode* wird in jeder Iteration eine freie Variable gegen eine gesperrte Variable ausgetauscht. Die Vorgehensweise sei an folgendem linearen Gleichungssystem demonstriert:

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 10$$
$$-x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$
$$6x_1 + 7x_2 - x_3 = 2$$

Die Variablen x_1, x_2 und x_3 sind freie Variablen. Unter Einführung der gesperrten Schlupfvariablen x_4 bis x_6 kommt man zu folgendem modifizierten Simplex-Ausgangstableau:

Tabelle 15: Tableau I – Simplex-Ausgangstableau zum Gleichungssystem

x_B \ Variablen	x_1 (frei)	x_2 (frei)	x_3 (frei)	x_4 (gesperrt)	x_5 (gesperrt)	x_6 (gesperrt)	RS
x_4 (gesperrt)	2	−3	1	1	0	0	10
x_5 (gesperrt)	(−1)	−1	3	0	1	0	8
x_6 (gesperrt)	6	7	−1	0	0	1	2

Die Reihenfolge der zu wählenden Pivotspalten und Pivotzeilen ist beliebig.

Tabelle 16: Tableau II – Simplex-Tableau nach 1. Iteration

x_B \ Variablen	x_1 (frei)	x_2 (frei)	x_3 (frei)	x_4 (gesperrt)	x_5 (gesperrt)	x_6 (gesperrt)	RS
x_4 (gesperrt)	0	−5	7	1	2	0	26
→ x_1 (frei)	1	1	−3	0	−1	0	−8
x_6 (gesperrt)	0	(1)	17	0	6	1	50

Tabelle 17: Tableau III – Simplex-Tableau nach 2. Iteration

x_B \ Variablen	x_1 (frei)	x_2 (frei)	x_3 (frei)	x_4 (gesperrt)	x_5 (gesperrt)	x_6 (gesperrt)	RS
x_4 (gesperrt)	0	0	(92)	1	32	5	276
x_1 (frei)	1	0	−20	0	−7	−1	−58
→ x_2 (frei)	0	1	17	0	6	1	50

Tabelle 18: Tableau IV – Simplex-Tableau nach 3. Iteration (Lösung des Gleichungssystems)

Variablen / x_B	x_1 (frei)	x_2 (frei)	x_3 (frei)	x_4 (gesperrt)	x_5 (gesperrt)	x_6 (gesperrt)	RS
→ x_3 (frei)	0	0	1	1/92	8/23	5/92	3
x_1 (frei)	1	0	0	5/23	−1/23	2/23	2
x_2 (frei)	0	1	0	−17/92	2/23	7/92	−1

Nach drei Iterationen ist das lineare Gleichungssystem gelöst: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$.

E. Minimierung mit der Simplexmethode

In den vorangegangenen Ausführungen wurde die Simplexmethode zur Lösung von linearen Programmierungsaufgaben mit einer zu maximierenden Zielfunktion behandelt. In gleicher Weise wie das *lineare Maximierungsproblem* kann auch das *lineare Minimierungsproblem* mit Hilfe der *Simplexmethode* gelöst werden. Die Vorgehensweise soll an folgender Aufgabenstellung erläutert werden (*Mischungsproblem*). (*Joksch, H. C.*, 1962, S. 46 ff.; *Vazsonyi, A.*, 1962, S. 77 ff.; *Weber, H. H.*, 1972, S. 57 ff.; *Bloech, J.*, 1974, S. 121 ff.; *Haupt, P.*, *Lohse, D.*, 1975, S. 106 ff., 178 ff.; *Schick, K.*, 1975, S. 134 ff.; *Vokuhl, P.*, 1965, S. 112 ff.)

1. Beispiel: Kostenminimale Mischung

Ein Betrieb der Nahrungsmittelindustrie stellt einen Süßwarenartikel her. Das Produkt setzt sich aus drei Substanzen (S_1, S_2 und S_3) zusammen, die gemischt werden. Eine Mischung soll von den drei Substanzen jeweils mindestens b_i ($i = 1, 2, 3$) Mengenanteile enthalten: $b_1 = 480$; $b_2 = 440$; $b_3 = 420$.
Für die Erstellung der Mischung sind die Mengen x_j ($j = 1,2$) von zwei verschiedenen Einsatzfaktoren (Rohstoffe R_1 und R_2) heranzuziehen. In den Einsatzfaktoren sind die gewünschten drei Substanzen unterschiedlich stark enthalten. Durch die Koeffizienten a_{ij} ist angegeben, wieviel ME der Substanz i in einer ME des Einsatzfaktors j enthalten sind:

Einsatzfaktor 1: $a_{11} = 8$; $a_{21} = 4$; $a_{31} = 2$

Einsatzfaktor 2: $a_{12} = 3$; $a_{22} = 4$; $a_{32} = 6$

Dabei kostet eine ME des Einsatzfaktors R_1 $k_1 = 30$ DM und des Einsatzfaktors R_2 $k_2 = 20$ DM.
Gesucht ist die ***kostenminimale Mischung*** der beiden Einsatzfaktoren.
Die Zielfunktion lautet:

$$\text{Minimiere } K = k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 = 30x_1 + 20x_2$$

Restriktionen:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \geqslant b_1; \quad 8x_1 + 3x_2 \geqslant 480$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \geqslant b_2; \quad 4x_1 + 4x_2 \geqslant 440$$

$$a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 \geqslant b_3; \quad 2x_1 + 6x_2 \geqslant 420$$

Nichtnegativitätsbedingung:

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

Um die Ungleichungen in Gleichungen zu überführen, werden Schlupfvariablen eingeführt:

$$8x_1 + 3x_2 - x_3 = 480$$

$$4x_1 + 4x_2 - x_4 = 440$$

$$2x_1 + 6x_2 - x_5 = 420$$

Neben die $n = 2$ Hauptvariablen sind mithin $m = 3$ Schlupfvariablen getreten.
Für alle Variablen – also auch die Schlupfvariablen – gilt die Nichtnegativitätsbedingung:

$$x_j \geqslant 0; \qquad x_{n+i} \geqslant 0 \qquad \text{(für alle j und i)}$$

In unserem Beispiel sind alle $b_i \geqslant 0$. Damit kann aus dem vorliegenden Gleichungssystem keine zulässige Basislösung abgelesen werden. Es ist also zunächst eine *zulässige Basislösung zu bestimmen*. Dazu kann die *M-Methode* oder das *Zwei-Phasen-Verfahren* herangezogen werden.

2. Minimierung mit Hilfe der M-Methode

Unter Verwendung der *M-Methode* sind *künstliche Schlupfvariablen* (gesperrte Variablen) in die Gleichungen einzuführen (je Gleichung eine künstliche Schlupfvariable):

$$\begin{array}{l}
8x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad\qquad\qquad + x_6 \qquad\qquad\qquad = 480 \\
4x_1 + 4x_2 \qquad - x_4 \qquad\qquad\qquad + x_7 \qquad\qquad = 440 \\
2x_1 + 6x_2 \qquad\qquad\qquad - x_5 \qquad\qquad\qquad + x_8 = 420
\end{array}$$

x_3, x_4, x_5: Schlupfvariablen; x_6, x_7, x_8: künstliche Schlupfvariablen

Die neue erweiterte Zielfunktion lautet (die gesperrten Schlupfvariablen mit dem sehr hohen Betrag M bewertet):

Minimiere $K = 30x_1 + 20x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7 + Mx_8$

Bei der Aufstellung des 1. Tableaus wird hier die Zeile z_j zur besseren Übersicht zusätzlich eingefügt:

Tabelle 19: Tableau I – Simplex-Tableau der (unzulässigen) Ausgangslösung

x_B \ Variablen	k_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6 (gesperrt)	x_7 (gesperrt)	x_8 (gesperrt)	RS (b_i)	q_i
x_6 (gesperrt)	M	(8)	3	−1	0	0	1	0	0	480	60
x_7 (gesperrt)	M	4	4	0	−1	0	0	1	0	440	110
x_8 (gesperrt)	M	2	6	0	0	−1	0	0	1	420	210
	k_j	30	20	0	0	0	M	M	M	0	
	z_j	14M	13M	−M	−M	−M	M	M	M	1.340 · M	
$k_j - z_j$		30 −14M	20 −13M	M	M	M	0	0	0	K = − 1.340 · M	

Beim Minimierungsproblem besteht die Entscheidungszeile aus ($k_j - z_j$)-Differenzen. Für alle Nichtbasisvariablen werden die Vor- und Nachteile ihrer Aufnahme in die Basislösung ermittelt. z_j zeigt – wie oben bereits ausgeführt – die Zu- oder Abnahme des Zielfunktionswertes (z.B. der Gesamtkosten K) durch Veränderungen an den Basisvariablen mit dem Index j:

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} k_i a_{ij} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n + m + m)$$

Dabei sind a_{ij} die Koeffizienten der Restriktionen und k_i die *Zielfunktionskoeffizienten der Lösungsvariablen* (Basisvariablen). k_j sind hingegen die *Zielfunktionskoeffizienten der Zielfunktion.*

Der Austausch der Variablen führt dann zu einer Abnahme der Gesamtkosten K, wenn die Differenz $k_j - z_j < 0$. Die Auswahl der Pivotspalte und Pivotzeile kann beliebig erfolgen. Als Pivotelement sei $a_{11} = 8$ ausgewählt. In der ersten Iteration kommt also x_1 in die Basis, während die gesperrte Schlupfvariable x_6 zur Nichtbasisvariablen wird:

Tabelle 20: Tableau II – Simplex-Tableau nach der 1. Iteration (unzulässige Lösung)

x_B	k_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6 (gesperrt)	x_7 (gesperrt)	x_8 (gesperrt)	RS (b_i)	q_i
→ x_1	30	1	3/8	−1/8	0	0	1/8	0	0	60	160
x_7 (gesperrt)	M	0	5/2	1/2	−1	0	−1/2	1	0	200	80
x_8 (gesperrt)	M	0	(21/4)	1/4	0	−1	−1/4	0	1	300	57,14
$k_j - z_j$		0	35/4 −31M/4	15/4 −3M/4	M	M	−15/4 +7M/4	0	0	K = −1800 −500 · M	

Tabelle 21: Tableau III – Simplex-Tableau nach der 2. Iteration (unzulässige Lösung)

x_B	k_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6 (gesperrt)	x_7 (gesperrt)	x_8 (gesperrt)	RS (b_i)	q_i
x_1	30	1	0	−1/7	0	1/14	1/7	0	−1/14	270/7	540
x_7 (gesperrt)	M	0	0	8/21	−1	(10/21)	−8/21	1	−10/21	400/7	120
→ x_2	20	0	1	1/21	0	−4/21	−1/21	0	4/21	400/7	
$k_j - z_j$		0	0	10/3 −8M/21	M	5/3 −10M/21	−10/3 + 29M/21	0	−5/3 +31M/21	K = −2300 −400M/7	

Tabelle 22: Tableau IV – Simplex-Tableau nach der 3. Iteration (Optimallösung)

x_B	k_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6 (gesperrt)	x_7 (gesperrt)	x_8 (gesperrt)	RS (b_i)
x_1	30	1	0	−1/5	3/20	0	1/5	−3/20	0	30
→ x_5	0	0	0	4/5	−21/10	1	−4/5	21/10	−1	120
x_2	20	0	1	1/5	−2/5	0	−1/5	2/5	0	80
$k_j - z_j$		0	0	2	7/2	0	−2 +M	−7/2 +M	0 +M	K = −2500

Im Tableau IV sind keine künstlichen (gesperrten) Schlupfvariablen mehr in der Basis; es handelt sich also um eine zulässige Lösung. Die optimale Lösung wird hier bereits durch die erste zulässige Lösung erreicht (alle ($k_j - z_j$)-Differenzen sind nichtnegativ). Die Optimallösung lautet:

$$x_1 = 30; \quad x_2 = 80; \quad K = 30 \cdot 30 + 20 \cdot 80 = 2.500$$

An der *optimalen Mischung* sind die beiden Substanzen S_1 und S_2 genau mit den geforderten Mindestmengen beteiligt ($8 \cdot 30 + 3 \cdot 80 = 480$ bzw. $4 \cdot 30 + 4 \cdot 80 = 440$). Die Schattenpreise zu den Schlupfvariablen x_3 und x_4 mit DM 2,– bzw. DM 7/2 geben an, um wieviel die Kosten (K) steigen würden, wenn die Substanz S_1 bzw. S_2 um eine ME erhöht würde. Müßten von der ersten Substanz (S_1) mindestens 481 ME (anstatt 480 ME) in die Mischung gelangen, betragen die Kosten der optimalen Mischung 2.500 + 2 = 2.502 DM. Die Substanz S_3 gelangt mit 120 ME über die Mindestanforderung hinaus in die Mischung ($x_5 = 120$). Die Mindestanforderung beträgt 420 ME; verbraucht werden jedoch in der Optimalmischung $30 \cdot 2 + 80 \cdot 6 = 540$ ME. Entsprechend ist der Schattenpreis, der zur Schlupfvariablen x_5 gehört, Null (vgl. Tab. 22: Tableau IV).

3. *Minimierung mit Hilfe des Zwei-Phasen-Verfahrens*

Zur Demonstration des *Zwei-Phasen-Verfahrens* wird das gleiche (oben behandelte) Mischungsproblem gelöst:
Die Zielfunktion und das Ungleichungssystem werden mit (–1) multipliziert:

$$G = -K = -30x_1 - 20x_2 \text{ ist zu maximieren!}$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad (j = 1, 2)$$

$$-8x_1 - 3x_2 \leqslant -480$$

$$-4x_1 - 4x_2 \leqslant -440$$

$$-2x_1 - 6x_2 \leqslant -420$$

Dadurch wird die *Minimierungsaufgabe zu einer Maximierungsaufgabe*. Nach Einführung der drei Schlupfvariablen x_3, x_4 und x_5 ergibt sich folgende unzulässige (Verletzung der Nichtnegativitätsbedingung) Ausgangslösung:

Tabelle 23: Tableau I – Simplex-Ausgangstableau in Phase 1

x_B \ Variablen	g_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS (b_i)
x_3	0	(–8)	–3	1	0	0	–480
x_4	0	–4	–4	0	1	0	–440
x_5	0	–2	–6	0	0	1	–420
$z_j - g_j$		30	20	0	0	0	G = – K = 0

Da alle Basisvariablen der Nullösung die Nichtnegativitätsbedingung verletzen, ist in Phase 1 die Zeilenauswahl beliebig. Das Pivotelement muß negativ sein; Spalte 1 und 2 erfüllen im Tableau I diese Bedingung für alle Zeilen. Als Pivotelement sei $a_{11} = -8$ gewählt, so daß in der ersten Iteration wieder die Strukturvariable x_1 in die Lösung eingeführt und dafür die Schlupfvariable x_3 zur Nichtbasisvariablen wird:

Tabelle 24: Tableau II – Lösung nach der 1. Iteration in Phase 1 – unzulässige Lösung

x_B	g_i \ Variablen	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS (b_i)
→ x_1	−30	1	3/8	−1/8	0	0	60
x_4	0	0	−5/2	−1/2	1	0	−200
x_5	0	0	(−21/4)	−1/4	0	1	−300
$z_j - g_j$		0	35/4	15/4	0	0	−K = − 1800

Tabelle 25: Tableau III – Lösung nach der 2. Iteration in Phase 1 – unzulässige Lösung

x_B	g_i \ Variablen	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS (b_i)
x_1	−30	1	0	−1/7	0	1/14	270/7
x_4	0	0	0	−8/21	1	(−10/21)	−400/7
→ x_2	−20	0	1	1/21	0	− 4/21	400/7
$z_j - g_j$		0	0	10/3	0	5/3	−K = − 2.300

Tabelle 26: Tableau IV – Lösung nach der 3. Iteration in Phase 2 – zulässige und optimale Lösung

x_B	g_i \ Variablen	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS (b_i)
x_1	−30	1	0	−1/5	3/20	0	30
→ x_5	0	0	0	4/5	−21/10	1	120
x_2	−20	0	1	1/5	−2/5	0	80
$z_j - g_j$		0	0	2	7/2	0	−K = − 2.500

Mit Tableau IV ist die erste Phase beendet; die gefundene Lösung ist eine zulässige Lösung, sie ist zugleich die Optimallösung. Zu beachten ist der Verlauf der Rechenschritte. Sie durchlaufen die gleichen Basislösungen wie bei der M-Methode.

Übungsfragen zu den Abschnitten I bis III

1. Welche Bedeutung kommt den linearen Entscheidungsmodellen in der Praxis zu?
2. Wie läßt sich der mathematische Kern der linearen Optimierung (Programmierung) beschreiben?
3. Aus welchen Teilen besteht ein linearer Programmansatz?
4. Was besagt das Eckentheorem (Simplextheorem) der linearen Planungsrechnung?
5. Warum verliert das Eckentheorem bei mehrdeutigen Lösungen eines linearen Programmansatzes nicht seine Gültigkeit?
6. Wie läßt sich der Standardansatz der linearen Planungsrechnung formulieren?
7. Was sind Basislösungen, Basisvariablen und Nichtbasisvariablen?
8. Wodurch ist die Normalform eines linearen Programms gekennzeichnet?
9. Worin besteht das iterative Rechenverfahren der Simplexmethode?
10. Wie lassen sich Ungleichungssysteme in Gleichungssysteme überführen?
11. Was ist der Unterschied zwischen Hauptvariablen und Schlupfvariablen? Wie lassen sich die Schlupfvariablen ökonomisch interpretieren?
12. Was versteht man unter „Nullösung" („Nullprogramm")?
13. Welche Funktion hat das Simplexkriterium und wie läßt es sich anwenden?
14. Was versteht man unter Opportunitätskosten (Schattenpreisen) und welche Funktion haben sie in der linearen Planungsrechnung?
15. Worin besteht der Unterschied der Spalten- und Zeilenauswahl bei den Simplexiterationen nach der „Steepest Unit Ascent"-Version und der „Greatest Change"-Version?
16. Wie lassen sich die Matrizenoperationen des modifizierten Gaußschen Algorithmus beschreiben?
17. In welche Schritte läßt sich die Vorgehensweise nach der Simplexmethode einteilen?
18. Wie lassen sich die Inhalte der Simplextableaus bei Programmplanungen ökonomisch interpretieren?
19. Woran erkennt man (optimale) Mehrfachlösungen bei der Simplexmethode?
20. Wie lassen sich die Engpässe optimaler Programme bewerten?
21. Was versteht man unter Degeneration (Entartung)? Wie läßt sich der dabei eventuell auftretende Zyklus mit der Simplexmethode durchbrechen?
22. Wie lassen sich lineare Programmierungsprobleme mit unzulässiger Ausgangslösung behandeln?
23. Wie läßt sich das Zwei-Phasen-Verfahren zur Bestimmung einer zulässigen Ausgangslösung beschreiben?
24. Wie läßt sich die M-Methode zur Bestimmung einer zulässigen Ausgangslösung beschreiben, wenn die Nebenbedingungen als Gleichungen formuliert sind?
25. Was versteht man unter „freien Variablen" und wie lassen sie sich mit der Simplexmethode behandeln?
26. Worin besteht der Unterschied zwischen einer Maximierung und einer Minimierung eines linearen Programmierungsproblems mit Hilfe der Simplexmethode?
27. Welche Verfahren können zur Minimierung von linearen Programmierungsproblemen herangezogen werden?

IV. Dualität in der linearen Planungsrechnung

Der Begriff *Dualität* wird auf Objekte oder Probleme angewendet, bei denen eine Polarität (Gegensätzlichkeit) gegeben ist. Dies gilt auch für die bisher behandelten Programmierungsaufgaben.
In der Theorie der linearen Planungsrechnung nimmt das *Dualitätstheorem* eine zentrale Stelle ein. Es besagt, daß zu jeder linearen Optimierungsaufgabe eine *duale lineare Optimierungsaufgabe* existiert. Bei der Dualität handelt es sich um die beweisbare Tatsache (*Dantzig, G. B.*, 1966, S. 163–167), daß jedem vorgelegten linearen Programm ein zweites – genau definiertes – duales Programm zugeordnet werden kann. Das Ausgangsproblem (ursprüngliche Problem) wird als *Primalproblem*, primales Problem oder kurz *Primal* bezeichnet. Das *Dualproblem* wird auch duales Problem oder *Dual* genannt. Zu beachten ist, daß die *Dualitätsbeziehung* symmetrisch ist, d.h., daß die Probleme zueinander dual sind: das Dual des Dualproblems ist wieder das Primalproblem. Wir können also nach Belieben eines der beiden Probleme (Primal- oder Dualproblem) als primal bezeichnen; das jeweils andere heißt dann dual.
Ist das *primale lineare Problem eine Maximierungsaufgabe*, so ist das *dazugehörige duale Problem eine Minimierungsaufgabe* und umgekehrt.

A. Verknüpfung dualer Probleme

Zwischen dem Primal- und dem dazugehörigen Dualproblem besteht folgender Zusammenhang (in Matrizenschreibweise bzw. unter Verwendung des Summenzeichens):

1. Standardproblem

Primalproblem

Lautet das Maximierungsproblem:

$$\text{Maximiere } G = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

dazugehöriges Dualproblem

so lautet das dazugehörige Minimieproblem:

$$\text{Minimiere } K = \sum_{i=1}^{m} b_i w_i$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \geqslant c_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$w_i \geqslant 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

oder in Matrizenschreibweise:

Maximiere G = $c'x$	Minimiere K = $b'w$
unter den Nebenbedingungen	unter den Nebenbedingungen
$Ax \leqslant b$	$A'w \geqslant c$
$x \geqslant o$	$w \geqslant o$

Dabei sind c und x Vektoren mit n Komponenten, b und w Vektoren mit m Komponenten, A ist eine m · n-Matrix und A' ist die transponierte („gestürzte") Matrix A; A' ist also eine n · m-Matrix.

Primalproblem	*dazugehöriges Dualproblem*
Lautet das *Minimierungsproblem:*	so lautet das dazugehörige *Maximierungsproblem:*
Minimiere $K = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	Maximiere $G = \sum_{i=1}^{m} b_i w_i$
unter den Nebenbedingungen	unter den Nebenbedingungen
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \geqslant c_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$
$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$	$w_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$

oder in Matrizenschreibweise:

Minimiere K = $c'x$	Maximiere G = $b'w$
unter den Nebenbedingungen	unter den Nebenbedingungen
$Ax \geqslant b$	$A'w \leqslant c$
$x \geqslant o$	$w \geqslant o$

Dabei sind wiederum c und x Vektoren mit n Komponenten, b und w Vektoren mit m Komponenten, A ist eine m·n-Matrix und A' die transponierte Matrix A; A' hat n Zeilen und m Spalten.

Die Entscheidungsvariablen (Unbekannten) der dualen Aufgabe sind mit $w_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ symbolisiert. Die Dualaufgabe hat soviel Unbekannte, wie die Primalaufgabe Nebenbedingungen hat. Neben dem unterschiedlichen Variablensystem und der entgegengesetzten Zielrichtung kehren sich die Ungleichheitszeichen in den Ungleichungen der Restriktionen um. Die Zahl der Restriktionen des Dualproblems entspricht wiederum der Anzahl der Entscheidungsvariablen im Primalproblem. Die rechte Seite („RS") bilden in der Dualaufgabe die Zielfunktionskoeffizienten der Primalaufgabe, während umgekehrt, die Beschränkungswerte b_i („RS"-Werte) der Primalaufgabe die Zielfunktionskoeffizienten der Dualaufgabe sind.

Die Koeffizienten der Restriktionen bleiben erhalten; ihre Anordnung wird jedoch verändert. Es werden die Zeilen und Spalten miteinander vertauscht.

2. Kanonisches Problem (in Matrizenschreibweise)

Ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Variablen ($n > m$) wird *kanonisch* genannt, wenn die Koeffizienten der m freien Variablen, der Basisvariablen, die Einheitsmatrix bilden (*Dantzig, G. B.*, 1966, S. 87 ff.).

Primalproblem	*Dualproblem*
Lautet das kanonische <u>*Maximierungsproblem:*</u>	so lautet das *dazugehörige* kanonische <u>*Minimierungsproblem:*</u>
Maximiere $G = c'x$	Minimiere $K = b'w$
unter den Nebenbedingungen	unter den Nebenbedingungen
$Ax = b$ $x \geqslant o$	$A'w \geqslant c$ $w \gtreqless o$
Lautet das kanonische <u>*Minimierungsproblem:*</u>	so lautet das *dazugehörige* kanonische <u>*Maximierungsproblem:*</u>
Minimiere $K = c'x$	Maximiere $G = b'w$
$Ax = b$ $x \geqslant o$	$A'w \leqslant c$ $w \gtreqless o$

Es ist zu erkennen, daß die dualen kanonischen Probleme nicht die charakteristischen Merkmale der primalen kanonischen Probleme tragen. Vielmehr haben sie Ungleichungen statt Gleichungen als Nebenbedingungen und beliebige statt nichtnegative Variablen.

Folgende *Aussagen über die Zusammenhänge von Primal- und Dualproblem* können gemacht werden (*Hadley, G.*, 1962, S. 228 ff.; *Krekó, B.*, 1970, S. 198 ff.; *Schick, K.*, 1975, S. 151 f.; *Bloech, J.*, 1974, S. 113; *Haupt, P.*, *Lohse, D.*, 1975, S. 243 f.; vgl. auch die dort angegebene Beweisführung!):

(*1*) Zu jedem linearen Optimierungsproblem existiert genau ein lineares Dualproblem.

(*2*) Die Problemvariablen des Primalproblems sind die Opportunitätskosten (Schattenpreise) der Schlupfvariablen des Dualproblems.

(*3*) Die Schlupfvariablen des Primalproblems sind die Opportunitätskosten der Problemvariablen im Dualproblem.

(*4*) Aus einem gegebenen optimalen Simplextableau sind die optimalen Lösungen beider Aufgabentypen, primal und dual, gleichzeitig gelöst und ablesbar (diese Tatsache hat auch erhebliche praktische Bedeutung).

(*5*) Die optimalen Werte der Zielfunktionen beider Aufgabentypen sind gleich (*Dualitätssatz*);
$G_{max} = K_{min}$.

(*6*) Ist die Primallösung gleich der Duallösung, so ist das Optimum erreicht.

(*7*) Ist die Lösung des Primalproblems unbegrenzt, so existiert keine zulässige Lösung des Dualproblems.

(*8*) Existiert keine zulässige Lösung des Primalproblems, so ist die Lösung des Dualproblems unbegrenzt und umgekehrt (vgl. 7).

(*9*) Besitzt ein lineares Programm eine degenerierte optimale Lösung, so liegen für das dazugehörige duale Programm unendlich viele optimale Lösungen vor.

(*10*) Zeilen des Primalproblems, deren Basisvariablen gesperrt sind, erscheinen im Dualproblem als Spalten mit freien Variablen als Nichtbasisvariablen und umgekehrt.

(*11*) Spalten des Primalproblems, deren Nichtbasisvariablen freie Variablen sind, treten im Dualproblem als Zeilen mit gesperrten Basisvariablen auf und umgekehrt.

(*12*) Das duale Problem eines Dualproblems ist wieder das Primalproblem.

Da im Primalproblem die gleichen Variablen und Koeffizienten auftreten wie im Dualproblem, kann bei der Optimierung das Primal- oder das Dualproblem benutzt werden. Die Zusammenhänge können nochmals folgender Darstellung entnommen werden (*Haupt, P., Lohse, D.*, 1975, S. 244 f.):

Tabelle 27: Primal-Dual-Tabelle

Problemvariablen Dual	Problemvariablen Primal $x_1 \geqslant 0$	$x_2 \leqslant 0$	$\dots x_n \gtreqless 0$	Beziehungen Primal	Beschränkungsvektor Primal	
$w_1 \geqslant 0$	a_{11}	a_{12}	$\dots a_{1n}$	$\leqslant$	b_1	Zielfunktionskoeffizienten der Problemvariablen Dual
$w_2 \leqslant 0$	a_{21}	a_{22}	$\dots a_{2n}$	$\geqslant$	b_2	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$w_m \gtreqless 0$	a_{m1}	a_{m2}	$\dots a_{mn}$	$=$	b_m	
Beziehungen Dual	$\geqslant$	$\leqslant$	$=$		Minimiere K Dual	
Beschränkungsvektor Dual	c_1	c_2	$\dots c_n$	Maximiere G Primal		
	Zielfunktionskoeffizienten der Problemvariablen Primal					

In dieser Tabelle ist das Primal als Maximierungsproblem und das Dual als Minimierungsproblem enthalten. Da das duale Dual das Primal ist, können aus der Tabelle auch die Zusammenhänge für das Primal als Minimierungsproblem und das Dual als Maximierungsproblem entnommen werden. Hierfür sind die Begriffe „Primal" und „Dual" zu vertauschen. Das dargestellte Problem ist ein sog. ***gemischtes Problem*** (lineares Mischsystem), das „$\leqslant$"-Beziehungen, „$\geqslant$"-Beziehungen und „="-Beziehungen enthält.

B. Duale Simplexmethode

Die Simplexmethode, die wir zunächst kennengelernt haben, geht von einer Ausgangslösung aus, die auf der rechten Seite („RS"-Spalte) kein negatives Element enthält. Diese Nichtnegativität in der „RS"-Spalte wird auch bei den Simplextransformationen beibehalten. Gleichzeitig wird angestrebt, aus der Entscheidungszeile jede negative Differenz $(z_j - g_j)$ zu eliminieren. Das Ergebnis ist eine optimale Lösung. Die soeben skizzierte Simplexmethode wird auch die *primale Simplexmethode* genannt.
Es liegt nun nahe, diesen Gedankengang umzukehren. Man gelangt dann zur *dualen Simplexmethode*. Hier wird die Nichtnegativitätsbedingung für die Elemente der „RS"-Spalte fallengelassen, d.h. für die b_i-Werte bestehen keine Vorzeichenbeschränkungen. Zugleich wird die Optimalitätsbedingung in der Entscheidungszeile $(z_j - g_j \geqslant 0)$ von Anfang an gesichert. Durch elementare Zeilenoperationen wird versucht, alle b_i-Werte nichtnegativ werden zu lassen. Ist dies erreicht, liegt die Optimallösung vor.

1. Beispiel: Mischungsproblem

Wir wollen die Vorgehensweise nach der *dualen Simplexmethode* an dem oben behandelten *Mischungsproblem* (vgl. S. 67 f.) erläutern:
Die Faktorpreise sind $k_1 = 30$ und $k_2 = 20$.
Als Beschränkungen sind folgende Mengenrelationen einzuhalten:

$$8x_1 + 3x_2 \geqslant 480$$

$$4x_1 + 4x_2 \geqslant 440$$

$$2x_1 + 6x_2 \geqslant 420$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

Die optimale Mischung ist mit Hilfe der *dualen Simplexmethode* zu berechnen.
Zielfunktion:

$$\text{Minimiere} \quad K = 30x_1 + 20x_2$$

$$\text{Maximiere} \ -G = -30x_1 - 20x_2$$

Nebenbedingungen

$$-8x_1 - 3x_2 \leqslant -480$$

$$-4x_1 - 4x_2 \leqslant -440$$

$$-2x_1 - 6x_2 \leqslant -420$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

Das Ausgangstableau lautet:

Tabelle 28: Tableau I – Simplex-Ausgangstableau (unzulässige Lösung)

x_B	g_i (Variablen)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS (b_i)
x_3	0	(−8)	−3	1	0	0	−480
x_4	0	−4	−4	0	1	0	−440
x_5	0	−2	−6	0	0	1	−420
$z_j - g_j$		30	20	0	0	0	K = − G = 0

Diese Ausgangslösung erfüllt die Kriterien des Optimums (vgl. Entscheidungszeile: $(z_j - g_j) \geqslant 0$), jedoch sind die ***Zulässigkeitsbedingungen*** (Nichtnegativitätsbedingungen) verletzt (vgl. „RS"-Spalte). Pivotspalte ist Zeile 1, wenn man den absolut größten negativen Wert der „RS"-Spalte als Auswahlkriterium heranzieht. Zur Auswahl der Pivotspalte sucht man den absolut kleinsten Quotienten aus $30/-8 = -3\ 3/4$ und $20/-3 = -6\ 2/3$. Der minimale Absolutwert dieser Quotienten ist $|-3\ 3/4| = 3\ 3/4$. Pivotspalte ist die 1. Spalte; Pivotelement ist $a_{pk} = a_{11} + -8$. Durch elementare Zeilentransformation wird nach 3 Iterationen die optimale Lösung erreicht, die mit der in Tableau IV (vgl. Tab. 26) identisch ist:

$$x_1 = 30,\quad x_2 = 80,\quad x_3 = 0,\quad x_4 = 0,\quad x_5 = 120,$$

$$K_{min} = G_{max} = 2.500$$

bzw. die entsprechenden Dualwerte:

$$w_1 = 2,\quad w_2 = 7/2,\quad w_3 = 0,\quad w_4 = 0,\quad w_5 = 0$$

Dem Programmansatz entspricht der ***duale Ansatz:***
Maximiere $G = 480w_1 + 440w_2 + 420w_3$ unter den Nebenbedingungen:

$$8w_1 + 4w_2 + 2w_3 \leqslant 30$$

$$3w_1 + 4w_2 + 6w_3 \leqslant 20$$

$$w_1, w_2, w_3 \geqslant 0$$

mit folgender Lösung:

Tabelle 29: Tableau I – Zulässige Simplex-Ausgangslösung („Nullösung")

w_B	g_i (Variablen)	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	RS (b_i)	q_i
w_4	0	(8)	4	2	1	0	30	3 3/4
w_5	0	3	4	6	0	1	20	6 2/3
$z_j - g_j$		−480	−440	−420	0	0	G = 0	

Tabelle 30: Tableau II – Lösung nach 1. Iteration

w_B	g_i	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	RS (b_i)	q_i
→ w_1	480	1	1/2	1/4	1/8	0	3 3/4	15
w_5	0	0	5/2	(21/4)	−3/8	1	8 3/4	5/3
$z_j - g_j$		0	−200	−300	60	0	G = 1800	

Tabelle 31: Tableau III – Lösung nach 2. Iteration

w_B	g_i	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	RS (b_i)	q_i
w_1	480	1	8/21	0	1/7	−1/2	10/3	35/4
→ w_3	420	0	(10/21)	1	−1/14	4/21	5/3	7/2
$z_j - g_j$		0	−400/7	0	270/7	400/7	G = 2.300	

Tabelle 32: Tableau IV – Lösung nach 3. Iteration – Optimallösung

w_B	g_i	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	RS (b_i)
w_1	480	1	0	−4/5	1/5	−1	2
→ w_2	440	0	1	21/10	−3/20	2/5	7/2
$z_j - g_j$		0	0	120	30	80	G = 2.500

Die Optimallösung lautet:

$$w_1 = 2,\quad w_2 = 7/2,\quad w_3 = 0,\quad w_4 = 0,\quad w_5 = 0;\quad G_{max} = K_{min} = 2.500$$

bzw. die entsprechenden Dualwerte

$$x_1 = 30,\quad x_2 = 80,\quad x_3 = 0,\quad x_4 = 0,\quad x_5 = 120$$

Zu einem linearen Programmierungsproblem gibt es also *zwei Variablensysteme* (x_j-Werte = Primalwerte und w_i-Werte = Dualwerte), die zum *gleichen optimalen Zielfunktionswert* führen.

Das *Dualitätstheorem* bietet eine *weitere Möglichkeit*, eine *Minimierungsaufgabe* zu lösen.

2. *Ökonomische Beziehungen zwischen Primal- und Dualproblem – dargestellt an einem Primal-Dual-Problem*

An Hand eines Beispiels sollen die Beziehungen zwischen einem Maximierungsproblem und dessen Dualproblem sowie zwischen einem Minimierungsproblem und dessen Dualproblem ökonomisch interpretiert werden (vgl. auch *Haupt, P., Lohse, D.*, 1975, S. 254 ff.; *Bol, G.*, 1980, S. 148 ff.):
Ein Betrieb A verfügt über 3 Fertigungsanlagen F_1, F_2 und F_3, auf denen zwei Produkte P_1 und P_2 hergestellt werden können. Dabei wird ein maximaler Deckungsbeitrag in der Planperiode (= 1 Monat) angestrebt. Zur Lösung des *Produktionsplanungsproblems*, das ein *Mengenproblem* darstellt, hat man folgendes lineare Programmierungsproblem (einschließlich der Dimensionen der Elemente) formuliert:

$$\text{Maximiere } G\,[\text{DM/Monat}] = 120x_1\,[\text{DM/ME}_1 \cdot \text{ME}_1/\text{Monat}] + 160x_2\,[\text{DM/ME}_2 \cdot \text{ME}_2/\text{Monat}]$$

unter den Nebenbedingungen

$$x_1 \left[\frac{\text{Mh}_1}{\text{ME}_1} \cdot \frac{\text{ME}_1}{\text{Monat}}\right] + x_2 \left[\frac{\text{Mh}_1}{\text{ME}_2} \cdot \frac{\text{ME}_2}{\text{Monat}}\right] \leqslant 130 \left[\frac{\text{Mh}_1}{\text{Monat}}\right]$$

$$2x_1 \left[\frac{\text{Mh}_2}{\text{ME}_1} \cdot \frac{\text{ME}_1}{\text{Monat}}\right] + 3x_2 \left[\frac{\text{Mh}_2}{\text{ME}_2} \cdot \frac{\text{ME}_2}{\text{Monat}}\right] \leqslant 360 \left[\frac{\text{Mh}_2}{\text{Monat}}\right]$$

$$0{,}8x_1 \left[\frac{\text{Mh}_3}{\text{ME}_1} \cdot \frac{\text{ME}_1}{\text{Monat}}\right] + 0{,}6x_2 \left[\frac{\text{Mh}_3}{\text{ME}_2} \cdot \frac{\text{ME}_2}{\text{Monat}}\right] \leqslant 96 \left[\frac{\text{Mh}_3}{\text{Monat}}\right]$$

Es bezeichnen:

ME_1 Mengeneinheiten des Produktes P_1
ME_2 Mengeneinheiten des Produktes P_2
Mh_1 Maschinenstunden auf Fertigungsanlage F_1
Mh_2 Maschinenstunden auf Fertigungsanlage F_2
Mh_3 Maschinenstunden auf Fertigungsanlage F_3

In einem anderen Betrieb B ist man davon überzeugt, daß man die drei Fertigungsanlagen besser einsetzen kann. Man bietet dem Betrieb A an, die drei Fertigungsanlagen von ihm zu mieten. Dabei will man allerdings eine möglichst geringe Miete zahlen. Für Betrieb B gilt es, die Preise w_i für je eine Maschinenstunde der Fertigungsanlage i zu bestimmen, zu denen der Betrieb A die Fertigungsanlagen vermietet. Seine Kosten sind die mit den Preisen w_i bewerteten Maschinenstunden für die drei Fertigungsanlagen F_1, F_2 und F_3.
Die Zielfunktion des Betriebes B lautet dann:

$$\text{Minimiere K [DM/Monat]} = 130w_1\,[Mh_1/\text{Monat} \cdot DM/Mh_1] + 360w_2\,[Mh_2/\text{Monat} \cdot DM/Mh_2] + 96w_3\,[Mh_3/\text{Monat} \cdot DM/Mh_3]$$

Der Betrieb A vermietet seine Fertigungsanlagen nur dann, wenn die Erträge aus der Vermietung der Anlagen mindestens dem Deckungsbeitrag der in der gleichen Zeit herstellbaren Produkte P_1 und P_2 entsprechen.
Das vorliegende Problem ist ein typischer Fall für ein Beispiel aus der *Spieltheorie* („bilaterales Monopol"):
Beide Partner verhalten sich rational. Die Mengen (hier Mh/Monat) sind gegeben. In einem „Aushandlungsprozeß" (Lösung des Problems) werden die Preise gesucht, die dem maximalen Deckungsbeitrag (G_{max}) des einen entsprechen und zugleich die Kosten des anderen minimieren (K_{min}). Die Nebenbedingungen für das *Preisproblem* des Betriebes B lauten:

$$w_1\left[\frac{Mh_1}{ME_1}\cdot\frac{DM}{Mh_1}\right] + 2w_2\left[\frac{Mh_2}{ME_1}\cdot\frac{DM}{Mh_2}\right] + 0{,}8w_3\left[\frac{Mh_3}{ME_1}\cdot\frac{DM}{Mh_3}\right] \geqslant 120[DM/ME_1]$$

$$w_1\left[\frac{Mh_1}{ME_2}\cdot\frac{DM}{Mh_1}\right] + 3w_2\left[\frac{Mh_2}{ME_2}\cdot\frac{DM}{Mh_2}\right] + 0{,}6w_3\left[\frac{Mh_3}{ME_2}\cdot\frac{DM}{Mh_3}\right] \geqslant 160[DM/ME_2]$$

Vergleicht man die beiden linearen Programmierungsprobleme, so läßt sich erkennen, daß ein Primalproblem (Betrieb A: Maximierungsaufgabe) und ein Dualproblem (Betrieb B: Minimierungsaufgabe) vorliegen. Für die Art der Probleme gilt: Ist das Primal ein *Mengenproblem*, so ist das Dual ein *Preisproblem* und umgekehrt.
Die optimale Lösung für beide Probleme kann mit der Simplexmethode ermittelt werden. Verwendet wird hier zunächst das *Primalproblem:*

Tabelle 33: Tableau I – Simplexausgangstableau (Nullösung)

x_B	g_i \ Variablen	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS (b_i)	q_i
x_3	0	1	1	1	0	0	130	130
x_4	0	2	(3)	0	1	0	360	120
x_5	0	0,8	0,6	0	0	1	96	160
$z_j - g_j$		−120	−160	0	0	0	G = 0	

Tabelle 34: Tableau II – Simplextableau nach 1. Iteration

	x_B \ g_i (Variablen)		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS (b_i)	q_i
	x_3	0	(1/3)	0	1	−1/3	0	10	30
→	x_2	160	2/3	1	0	1/3	0	120	180
	x_5	0	0,4	0	0	−1/5	1	24	60
	$z_j - g_j$		−40/3	0	0	160/3	0	G = 19.200	

Tabelle 35: Tableau III – Simplextableau nach 2. Iteration – Optimallösung

	x_B \ g_i (Variablen)		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS (b_i)
→	x_1	120	1	0	3	−1	0	30
	x_2	160	0	1	−2	1	0	100
	x_5	0	0	0	−6/5	1/5	1	12
	$z_j - g_j$		0	0	40	40	0	G = 19.600

Die Lösung für die beiden Probleme kann dem Tableau III (vgl. Tab. 35 und 38) entnommen werden.
Für Betrieb A (Maximierungsproblem) lautet sie:

Menge Produkt P_1 $\quad x_1 = 30 \left[\frac{ME_1}{\text{Monat}}\right]$

Menge Produkt P_2 $\quad x_2 = 100 \left[\frac{ME_2}{\text{Monat}}\right]$

Deckungsbeitrag $G_{max} = 19.600$ [DM/Monat]

Für Betrieb B (Minimierungsproblem) lautet die optimale Lösung:

Preis für eine Maschinenstunde von F_1 $\quad w_1 = 40$ [DM/Mh_1]
Preis für eine Maschinenstunde von F_2 $\quad w_2 = 40$ [DM/Mh_2]
Preis für eine Maschinenstunde von F_3 $\quad w_3 = 0$ [DM/Mh_3]

Kosten $K_{min} = 19.600$ [DM/Monat]

Zum Vergleich soll nunmehr das *Dualproblem* für die Lösung verwendet werden (Zwei-Phasen-Verfahren):

Tabelle 36: Tableau I – Simplexausgangstableau (Nullösung)

w_B	g_i \ Variablen	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	RS (b_i)
w_4	0	−1	−2	−0,8	1	0	−120
w_5	0	−1	(−3)	−0,6	0	1	−160
$z_j - g_j$		130	360	96	0	0	−K = 0

Tabelle 37: Tableau II – Simplextableau nach 1. Iteration in Phase 1

w_B	g_i \ Variablen	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	RS (b_i)
w_4	0	(−1/3)	0	−2/5	1	−2/3	−40/3
→ w_2	−360	1/3	1	1/5	0	−1/3	160/3
$z_j - g_j$		10	0	24	0	120	−K = − 19.200

Tabelle 38: Tableau III – Simplextableau nach 2. Iteration in Phase 1 – zulässige und zugleich optimale Lösung

w_B	g_i \ Variablen	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	RS (b_i)
→ w_1	−130	1	0	6/5	−3	2	40
w_2	−360	0	1	−1/5	1	−1	40
$z_j - g_j$		0	0	12	30	100	−K = − 19.600

Für Betrieb A und B entspricht die Optimallösung der bereits oben angeführten.

V. Revidierte Simplexmethode

Die *revidierte Simplexmethode* wurde vor allem für Berechnungen auf EDV-Anlagen entwikkelt. Diese Methode nutzt gewisse Vorteile der Matrizenverknüpfungen in der linearen Optimierung bei der Berechnung und Speicherung der Lösungen aus. Ihre wichtigsten Vorteile gegenüber der besprochenen *regulären Simplexmethode* sind:

(1) Bei der revidierten Simplexmethode ergibt sich ein geringerer Bedarf an Speicherkapazität;
(2) die Anzahl der Rechenoperationen ist in der Regel kleiner;
(3) Rundungsfehler wirken sich bei der revidierten Simplexmethode weniger aus, da immer wieder auf die Ausgangswerte zurückgegriffen wird.

Jedoch hat die revidierte Simplexmethode gegenüber der regulären Simplexmethode auch Nachteile. So wird beispielsweise oft erst wesentlich später festgestellt, ob eine Aufgabe lösbar ist.
Bei der revidierten Simplexmethode erfolgt die Bestimmung einer neuen Basislösung nicht – wie bei der regulären Simplexmethode – durch elementare Zeilenoperationen, sondern mit Hilfe der *Matrizenrechnung*. Die revidierte Simplexmethode ist ein Verfahren, das auf alle Varianten der Simplexmethode (M-Methode, Zwei-Phasen-Verfahren etc.) angewendet werden kann.
Die angesprochenen Matrizenverknüpfungen sind Matrizenmultiplikationen:
die Transformation des s-ten Simplextableaus in das (s + 1)-te Simplextableau läßt sich in Form einer *Matrizenmultiplikation* darstellen.
Zur Beschreibung der Vorgehensweise nach der revidierten Simplexmethode gehen wir von der Normalform einer linearen Maximierungsaufgabe aus.

A. Rechenschritte der revidierten Simplexmethode

Schritt 1:
Zunächst ist das Optimierungsproblem in seiner kanonischen Form in das Simplex-Ausgangstableau einzutragen (Basislösung 1):

Tabelle 39: Tableau I – Simplex-Ausgangstableau – Maximierungsproblem

Variablen $x_B^{(1)}$	$g_i^{(1)}$	$x_1 \quad x_2 \dots x_n$ Hauptvariablen	$x_{n+1} \dots x_{n+m}$ Schlupfvariablen	RS $(b_i^{(1)})$
x_{n+1}	0			$b_1^{(1)}$
x_{n+2}	0			$b_2^{(1)}$
.	.	$A_{(m,n)}$	$B^{-1(1)}_{(m,m)}$	.
x_{n+m}	0			$b_m^{(1)}$
$z_j^{(1)} - g_j$		$-g_1 \quad -g_2 \dots -g_n$	$0 \dots \quad 0$	$G^{(1)} = 0$

Bei der revidierten Simplexmethode steht unter den Schlupfvariablen oder künstlichen Schlupfvariablen, die in der Ausgangslösung die Basisvariablen sind, in jedem Tableau die Basisinverse $B^{-1(s)}_{(m,m)}$ der jeweiligen Basislösung s. Diese ist im *Ausgangstableau* eine *Einheitsmatrix*. Der hochgestellte Index in Klammern bezeichnet jedes Element als zu einem bestimmten Tableau einer bestimmten Basislösung gehörend. Jede Basislösung wird mit dem Index s gekennzeichnet. Für die Ausgangslösung ist s = 1.

Genau wie bei den *Inversionsverfahren* zur Lösung linearer Gleichungssysteme (Matrizeninversion) entsteht auch beim Simplexverfahren anstelle der Einheitsmatrix die Kehrmatrix (inverse Matrix) der jeweiligen *Spaltenbasis B* und es ist $B^{-1}_{(m,m)} \cdot b_{(m,1)} = x_{(m,1)}$ die zugehörige Basislösung.

Jedes mögliche System von m aus den n vorhandenen Spaltenvektoren der Matrix $A_{(m,\,n)}$ wird als *Spaltenbasis* $B_{(m,\,m)}$ bezeichnet. Eine Spaltenbasis bildet stets eine quadratische Matrix mit m Zeilen und m Spalten. Aus n > m Spaltenvektoren a_j des Typs (m, 1) lassen sich $\binom{n}{m}$ verschiedene Spaltenbasen bilden. (Vgl. auch *Niemeyer, G.*, 1968, S. 56 ff.)

Beispiele:

In Tableau II (vgl. Tab. 3, S. 46) des Zahlenbeispiels „Optimierung eines Produktionsprogramms" ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1/70 & 0 & 0 \\ -8/70 & 1 & 0 \\ -2/7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Kehrmatrix der Spaltenbasis $B = (a_2, a_4, a_5)$; (vgl. Tabelle 1, S. 43); denn es ist

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{70} & 0 & 0 \\ -\frac{8}{70} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{7} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 20 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und es ist

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{70} & 0 & 0 \\ -\frac{8}{70} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{7} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9.800 \\ 1.600 \\ 3.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 480 \\ 200 \end{pmatrix} = x^{(2)}_{B}$$

die dazugehörige Lösung des primalen Problems.

Oder in Tableau III (vgl. Tab. 4 auf S. 48) ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3/70 & 0 & -1/10 \\ 8/35 & 1 & -6/5 \\ -2/35 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

die Kehrmatrix der Spaltenbasis $B = (a_2, a_4, a_1)$ – vgl. S. 43 –

$$\begin{pmatrix} 3/70 & 0 & -1/10 \\ 8/35 & 1 & -6/5 \\ -2/35 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 & 0 & 35 \\ 8 & 1 & 10 \\ 20 & 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und es ist

$$\begin{pmatrix} 3/70 & 0 & -1/10 \\ 8/35 & 1 & -6/5 \\ -2/35 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9.800 \\ 1.600 \\ 3.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 240 \\ 40 \end{pmatrix} = x_B^{(3)}$$

die dazugehörige Basislösung des primalen Problems.

Die revidierte Simplexmethode benutzt zur Ermittlung einer neuen Basislösung ausschließlich die Kehrmatrix der Spaltenbasis, aus der alle notwendigen Informationen für den Basistausch gewonnen werden.

Es liege beispielsweise das folgende Tableau mit zulässiger Lösung vor (mit $\overline{A}^{(s)}$ wird das Simplextableau der s-ten Basislösung symbolisiert):

Tabelle 40: Tableau $\overline{A}^{(1)}$

$x_B^{(1)}$	$g_i^{(1)}$ Variablen	x_1	x_2	x_3	x_4	G	RS ($b_i^{(1)}$)
x_3	0	a_{11}	a_{12}	1	0	0	$b_1^{(1)}$
x_4	0	a_{21}	a_{22}	0	1	0	$b_2^{(1)}$
$z_j^{(1)} - g_j$		$-g_1$	$-g_2$	0	0	1	$G^{(1)} = 0$

Die Zielfunktion kann – wie hier geschehen – auch als eine Restriktion in das Tableau eingeführt werden (*Bloech, J.*, 1974, S. 145 f.): $-g_1 \cdot x_1 - g_2 \cdot x_2 + 0x_3 + 0x_4 + G = 0$. Für G ist eine zusätzliche Spalte in das Tableau aufzunehmen. G ist dann immer in der Lösung und soll maximiert werden.

Schritt 2:

Das Optimalitätskriterium ist anzuwenden, d.h. es ist zu prüfen, ob alle Differenzen $(z_j^{(1)} - g_j)$ der Entscheidungszeile größer oder gleich Null sind. Ist dies der Fall, so ist die Ausgangslösung die optimale Lösung. Sind hingegen noch negative Elemente $(z_j^{(1)} - g_j < 0)$ vorhanden, folgt Schritt 3.

Schritt 3:

Z.B. nach der „Steepest Unit Ascent"-Version erfolgt die Auswahl der Pivotspalte k. D.h., die minimale Differenz in der Entscheidungszeile bestimmt die Pivotspalte.

Schritt 4:

Es sind die Elemente $a_{ik}^{(s)}$ der Pivotspalte k für die Basislösung s zu bestimmen:

$$a_k^{(s)} = \begin{pmatrix} a_{1k}^{(s)} \\ a_{2k}^{(s)} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mk}^{(s)} \end{pmatrix} = B^{-1(s)} \cdot a_k^{(1)}$$

Schritt 5:

Es ist zu prüfen, ob alle Elemente $a_{ik}^{(s)}$ der Pivotspalte nichtpositiv sind ($a_{ik}^{(s)} \leqslant 0$?). Ist dies der Fall, so hat das vorliegende lineare Programmierungsproblem eine unbegrenzte Zielvariable (vgl. S. 52 f.). Die Formulierung der Aufgabe sollte auf ihre Richtigkeit hin überprüft werden.

Existieren positive Elemente $a_{ik}^{(s)}$ der Pivotspalte, folgt Schritt 6.

Schritt 6:

Für alle $a_{ik}^{(s)} > 0$ sind die Quotienten $q_i = \frac{b_i^{(s)}}{a_{ik}^{(s)}}$ zu bestimmen. Die Zeile mit dem kleinsten Quotienten q_i ist die Pivotzeile p. Die entsprechende Variable dieser Zeile ist die neue Nichtbasisvariable (neue Nullvariable).

Schritt 7:

Die neue Basisinverse $B^{-1(s+1)}$ für die (s + 1)-te Basislösung ist zu bestimmen:

$$B^{-1(s+1)} = (e_1, \ldots, t_p^{(s)}, \ldots, e_m) \cdot B^{-1(s)}$$

Die Matrix $(e_1, \ldots, t_p^{(s)}, \ldots, e_m)$ – die kurz mit $T^{(s)}$ bezeichnet werden soll – ist eine Einheitsmatrix vom Typ (m,m), in deren p-ter Spalte der Vektor $t_p^{(s)}$ steht.

Die Elemente dieses Spaltenvektors werden wie folgt berechnet:

$$\text{für } i = p \qquad t_{ip}^{(s)} = \frac{1}{a_{pk}^{(s)}}$$

$$\text{für } i \neq p \qquad t_{ip}^{(s)} = \frac{-a_{ik}^{(s)}}{a_{pk}^{(s)}}$$

Die neue Basisinverse $B^{-1(s+1)}$ ist in das (s + 1)-te Tableau einzutragen. Das s-te Tableau wird also in das (s + 1)-te Simplextableau überführt, indem es von links mit $(e_1, \ldots, t_p^{(s)}, \ldots, e_m)$ multipliziert wird.

Im obigen Beispiel (s = 1) – vgl. Tabelle 40: Tableau $\bar{A}^{(1)}$ – sei k = 2 die Pivotspalte und p = 1 die Pivotzeile, so daß $a_{pk}^{(1)} = a_{12}$ das Pivotelement ist. In der quadratischen Matrix $(e_1, \ldots, t_p^{(s)}, \ldots, e_m)$ enthält die Spalte p = 1 die Elemente:

$$t_{11}^{(1)} = \frac{1}{a_{12}^{(1)}}$$

$$t_{21}^{(1)} = \frac{-a_{22}}{a_{12}^{(1)}}$$

$$t_{31}^{(1)} = \frac{-(-g_2)}{a_{12}^{(1)}}$$

und

$$T^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{12}} & 0 & 0 \\ -\frac{a_{22}}{a_{12}} & 1 & 0 \\ \frac{g_2}{a_{12}} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $T^{(s)}$ ist entsprechend der Matrix $T^{(1)}$ aufgebaut. Lautet das Pivotelement a_{pk}, so werden die Elemente der Matrix $T^{(s)}$ nach den beschriebenen Regeln ermittelt.
Das zweite Tableau $\overline{A}^{(2)}$ ergibt sich entsprechend durch folgende Verknüpfung

$$\overline{A}^{(2)} = T^{(1)} \cdot \overline{A}^{(1)}$$

Werden mehrere Tableaus nacheinander durch Multiplikation mit Transformationsmatrizen $T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots$ berechnet, so gilt:

$$\overline{A}^{(3)} = T^{(2)} \cdot \overline{A}^{(2)} = T^{(2)} \cdot T^{(1)} \cdot \overline{A}^{(1)}$$

$$\overline{A}^{(4)} = T^{(3)} \cdot \overline{A}^{(3)} = T^{(3)} \cdot T^{(2)} \cdot T^{(1)} \cdot \overline{A}^{(1)}$$

Wird im obigen Beispiel die *Berechnung des Tableaus* durchgeführt, so ergibt sich:

$$\overline{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{12}} & 0 & 0 \\ -\frac{a_{22}}{a_{12}} & 1 & 0 \\ \frac{g_2}{a_{12}} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 & 0 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 & 0 & b_2 \\ -g_1 & -g_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\overline{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{a_{12}} & 1 & \frac{1}{a_{12}} & 0 & 0 & \frac{b_1}{a_{12}} \\ a_{21} - \frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}} & 0 & -\frac{a_{22}}{a_{12}} & 1 & 0 & b_2 - \frac{a_{22}}{a_{12}} b_1 \\ \frac{a_{11}g_2}{a_{12}} - g_1 & 0 & \frac{g_2}{a_{12}} & 0 & 1 & \frac{g_2}{a_{12}} b_1 \end{pmatrix}$$

Der beschriebene Transformationsvorgang kann auch in Vektorverknüpfungen zerlegt werden (vgl. z.B. die Schritte 7a, 7b und 10):

Schritt 7a:
Der Vektor $b^{(s+1)}$ kann für die (s + 1)-te Basislösung auch wie folgt bestimmt werden:

$$b^{(s+1)} = B^{-1(s+1)} \cdot b^{(1)}$$

Der Vektor $b^{(s+1)}$ ist in das (s + 1)-te Tableau einzutragen und stellt die neue Basislösung dar.

Schritt 7b:
Die Schattenpreise (Opportunitätswerte) der Variablen in der Basislösung lassen sich auch wie folgt bestimmen:
a) für Hauptvariablen (Strukturvariablen) $(x_1, \ldots, x_n)$:

$$(z_1^{(s+1)} - g_1, z_2^{(s+1)} - g_2, \ldots, z_n^{(s+1)} - g_n) =$$

$$= g^{(s+1)'} \cdot B^{-1(s+1)} \cdot A - (g_1, g_2, \ldots, g_n)$$

b) für Schlupfvariablen $(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$:

$$(z_{n+1}^{(s+1)} - g_{n+1}, z_{n+2}^{(s+1)} - g_{n+2}, \ldots, z_{n+m}^{(s+1)} - g_{n+m}) =$$

$$= g^{(s+1)} \cdot B^{-1(s+1)} - (g_{n+1}, g_{n+2}, \ldots, g_{n+m})$$

Die errechneten Schattenpreise sind in das (s + 1)-te Tableau einzutragen.

Schritt 8:
Der Vektor $g^{(s+1)}$ der Zielfunktionskoeffizienten – $g_i^{(s+1)}$ – der Basisvariablen für die (s + 1)-te Basislösung läßt sich wie folgt formulieren:
Die p-te Komponente des Vektors $g^{(s)}$ ist mit dem Zielfunktionskoeffzienten g_k der neuen Basisvariablen zu vertauschen. Diese steht in der p-ten Zeile des (s + 1)-ten Tableaus.

Schritt 9:
Das Optimalitätskriterium ist anzuwenden:
$(z_j^{(s+1)} - g_j) < 0$? (für alle j). Wenn ja, ist s = s + 1 zu setzen, und es folgt Schritt 3. Wenn alle Schattenpreise nichtnegativ sind, ist die Optimallösung erreicht. Es folgt Schritt 10.

Schritt 10:
Der Wert der Zielfunktion – der sich auch durch Vektorverknüpfungen ermitteln läßt – ist für die optimale Lösung zu errechnen: $G^{(s+1)} = g^{(s+1)} \cdot b^{(s+1)}$. Die übrigen Werte sind dem Optimaltableau zu entnehmen.

B. Zahlenbeispiel zur revidierten Simplexmethode

Zielfunktion:

Maximiere $G = 7x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 3x_4$

Beschränkungen:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 6$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 \leq 8$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$$
$$x_j \geq 0 \text{ (für alle j)}.$$

Tabelle 41: Tableau I – Ausgangslösung der revidierten Simplexmethode (Basislösung 1): „Nullösung"

$x_B^{(1)}$	Variablen / $g_i^{(1)}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RS ($b_i^{(1)}$)	q_i
x_5	0	1	1	1	1	1	0	0	6	6
x_6	0	1	(2)	0	1	0	1	0	8	4
x_7	0	2	1	1	0	0	0	1	8	8
$z_j^{(1)} - g_j$		−7	−8	−6	−3	0	0	0	$G^{(1)} = 0$	

Dieses Tableau I weist praktisch keine Unterschiede zum ersten Tableau der regulären Simplexmethode auf. Die in diesem Tableau enthaltenen Daten werden für spätere Rechenschritte immer wieder benötigt. Bei der Berechnung jeder neuen Basislösung erfolgt ein Rückgriff auf die Daten dieses Ausgangstableaus.

Die Hauptvariable x_2 hat den größten negativen Opportunitätswert. Sie wird als neue Basisvariable gewählt. Die zweite Spalte des Tableaus wird zur Pivotspalte (k = 2). Die Elemente der Pivotspalte werden bestimmt:

$$a_2^{(1)} = B^{-1(1)} \cdot a_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für die Elemente $a_{i2}^{(1)} > 0$ werden die Quotienten q_i ermittelt (vgl. die Hilfsspalte q_i in Tableau I):

$$q_i = \frac{b_i^{(1)}}{a_{i2}^{(1)}}; \quad q_1 = \frac{6}{1} = 6; \quad q_2 = \frac{8}{2} = 4; \quad q_3 = \frac{8}{1} = 8$$

Der kleinste Quotient $q_2 = 4$ bestimmt die Pivotzeile p = 2 mit dem Pivotelement $a_{22} = 2$. x_2 wird also bei der bevorstehenden Iteration in die Basislösung eingeführt.
Nun kann die Basisinverse für die zweite Basislösung, $B^{-1(2)}$, bestimmt werden. Zunächst ist die Transformationsmatrix $T^{(1)} = (e_1, \ldots, t_p^{(1)}, \ldots, e_m)$ aufzustellen. Die Elemente $t_{ip}^{(1)}$ des Vektors $t_p^{(1)}$ lauten:

für i = p = 2: $\quad t_{22}^{(1)} = \frac{1}{a_{22}^{(1)}} = \frac{1}{2}$

für i ≠ p: $\quad$ i = 1 $\quad t_{12}^{(1)} = -\frac{a_{12}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = -\frac{1}{2}$

$$i = 3 \quad t_{32}^{(1)} = -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = -\frac{1}{2}$$

Daraus folgt:

$$(e_1, \ldots, t_p^{(1)}, \ldots, e_m) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Die neue Basisinverse $B^{-1(2)}$ ergibt sich durch folgende Matrizenmultiplikation:

$$B^{-1(2)} = (e_1, \ldots, t_p^{(1)}, \ldots, e_m) \cdot B^{-1(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sie wird in das Tableau II als neue Basisinverse eingetragen.
Der Vektor $b^{(2)}$, für die zweite Basislösung ergibt sich aus:

$$b^{(2)} = B^{-1(2)} \cdot b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Auch $b^{(2)}$ ist in das Tableau zu übernehmen.
Der Vektor der Zielfunktionskoeffizienten der Basisvariablen für die zweite Basislösung, $g^{(2)}$, wird ermittelt: anstelle der Null (Variable x_6 in Tableau I) tritt der Wert 8 (Zielfunktionskoeffizient $g_2 = 8$ der neuen Basisvariablen x_2).
Die neue Basisvariable x_2 steht in der zweiten Zeile des Tableaus II. Die Opportunitätskosten der zweiten Basislösung sind wie folgt zu bestimmen:

(1) für die Hauptvariablen

$$(z_1^{(2)} - g_1 \quad z_2^{(2)} - g_2 \quad z_3^{(2)} - g_3 \quad z_4^{(2)} - g_4) =$$

$$= (0\ 8\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - (7\ 8\ 6\ 3) = (-3\ \ 0\ \ -6\ \ 1)$$

(2) für die Schlupfvariablen

$$(z_5^{(2)} - g_5 \quad z_6^{(2)} - g_6 \quad z_7^{(2)} - g_7) = (0\ 8\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} - (0\ 0\ 0) = (0\ 4\ 0)$$

Die Opportunitätswerte werden in das 2. Tableau übertragen:

Tabelle 42: Tableau II – Lösung nach 1. Iteration mit Hilfe der revidierten Simplexmethode – Basislösung 2

$x_B^{(2)}$	$g_i^{(2)}$ \ Variablen	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RS ($b_i^{(2)}$)	q_i
x_5	0			(1)		1	−1/2	0	2	2
→ x_2	8			0		0	1/2	0	4	–
x_7	0			1		0	−1/2	1	4	4
$z_j^{(2)} - g_j$		−3	0	−6	1	0	4	0		

Im Gegensatz zum Tableau I und den Tableaus bei Anwendung der regulären Simplexmethode enthält das vorstehende Tableau II nur diejenigen Elemente, die in jeder Basislösung neu berechnet werden.
Es ist nun zu prüfen, ob die vorliegende Lösung des Tableaus II optimal ist. Da noch negative Elemente in der Entscheidungszeile existieren, kann eine Verbesserung der Lösung erreicht werden, indem x_1 oder x_3 zu Basisvariablen werden. Nach der „Steepest Unit Ascent"-Version wird die Spalte k = 3 als Pivotspalte ausgewählt.

Die Elemente $a_{i3}^{(2)}$ können nicht aus dem zweiten Tableau entnommen werden. Sie sind zu bestimmen:

$$a_3^{(2)} = B^{-1(2)} \cdot a_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Auch diese Elemente werden in das zweite Tableau eingetragen. Von dort können sie für die weiteren Berechnungen entnommen werden.

Da $q_1 = \frac{b_1^{(2)}}{a_{13}^{(2)}} = \frac{2}{1} = 2$ der kleinste Quotient q_i ist, ist die erste Zeile (p = 1) die Pivotzeile und

$a_{13}^{(2)} = 1$ das Pivotelement. Durch die Auswahl der ersten Zeile als Pivotzeile wird die seitherige Basisvariable x_5 zur Nichtbasisvariablen (Nullvariablen) und x_3 an deren Stelle in die Basislösung eingeführt.
Unter analoger Anwendung der beschriebenen Rechenschritte ergibt sich das Tableau III.
Zunächst ist die Basisinverse $B^{-1(3)}$ für die dritte Basislösung zu bestimmen. Dazu wird die Matrix $T^{(2)} = (e_1, \ldots, t_p^{(2)}, \ldots, e_m)$ aufgestellt. Die Elemente $t_{ip}^{(2)}$ des Vektors $t_p^{(2)}$ sind:

für i = p = 1 $\quad t_{11}^{(2)} = \frac{1}{a_{13}^{(2)}} = \frac{1}{1} = 1$

für i ≠ p: i = 2 $\quad t_{21}^{(2)} = -\frac{a_{23}^{(2)}}{a_{13}^{(2)}} = -\frac{0}{1} = 0$

für i = 3 $\quad t_{31}^{(2)} = -\frac{a_{33}^{(2)}}{a_{13}^{(2)}} = -\frac{1}{1} = -1$

Daraus folgt:

$$(e_1, \ldots, t_p^{(2)}, \ldots, e_m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die neue Basisinverse

$$B^{-1(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wird in das dritte Tableau eingetragen.

Der Vektor $b^{(3)}$ für die Basislösung 3

$$b^{(3)} = B^{-1(3)} \cdot b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist ebenfalls in das dritte Tableau zu übertragen.

Im Vektor der Zielfunktionskoeffizienten der Basisvariablen wird die p-te Komponente (p = 1) ausgetauscht. Anstelle der Null (Variable x_5) wird der Zielfunktionskoeffizient der neuen Basisvariablen x_3 eingesetzt ($g_3 = 6$).

Die Opportunitätswerte der Variablen in der dritten Basislösung sind:

(1) für die Hauptvariablen

$$(z_1^{(3)} - g_1 \quad z_2^{(3)} - g_2 \quad z_3^{(3)} - g_3 \quad z_4^{(3)} - g_4) =$$

$$= (6 \;\; 8 \;\; 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - (7 \;\; 8 \;\; 6 \;\; 3) = (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 11)$$

(2) für die Schlupfvariablen

$$(z_5^{(3)} - g_5 \quad z_6^{(3)} - g_6 \quad z_7^{(3)} - g_7) = (6 \;\; 8 \;\; 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (6 \;\; 1 \;\; 0)$$

Die errechneten Opportunitätswerte werden in das Tableau III übernommen. Da alle Opportunitätswerte größer oder gleich Null sind ($z_j^{(3)} - g_j \geq 0$), ist mit Tableau III die optimale Lösung erreicht.

Für die Optimallösung wird der Zielfunktionswert ermittelt:

$$G^{(3)} = g^{(3)} \cdot b^{(3)} = (6 \;\; 8 \;\; 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 44$$

Auch dieser Wert wird schließlich in das dritte Tableau eingetragen:

Tabelle 43: Tableau III – Lösung nach 2. Iteration mit Hilfe der revidierten Simplexmethode – Basislösung 3 = Optimallösung

$x_B^{(3)}$	$g_i^{(3)}$ Variablen	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RS ($b_i^{(3)}$)
→ x_3	6					1	−1/2	0	2
x_2	8					0	1/2	0	4
x_7	0					−1	0	1	2
$z_j^{(3)} - g_j$		0	0	0	11	6	1	0	$G^{(3)} = 44$

Die optimale Lösung lautet:

$x_1 = 0;\ x_2 = 4;\ x_3 = 2;\ x_4 = 0;\ x_5 = 0;$

$x_6 = 0;\ x_7 = 2;\ G_{max} = 44$

Eine Variante der revidierten Simplexmethode, die sogenannte „symmetrische revidierte Simplexmethode", wird von *Müller-Merbach* beschrieben (*Müller-Merbach, H.*, 1973, S. 230 ff.).

VI. Postoptimale Rechnungen

A. Grundlegung

Bisher haben wir für die Koeffizienten der Zielfunktion und der Nebenbedingungen feste (determinierte) Werte vorgegeben. Daher gelten Lösungen zunächst auch nur für diese Werte.

Für viele betriebswirtschaftliche Problemstellungen ist es vorteilhaft, die Abhängigkeit der optimalen Lösung eines linearen Programms von den einzelnen Zielfunktionskoeffizienten und/oder von den Koeffizienten der Nebenbedingungen zu untersuchen. Solche Rechnungen, die sich an die Ermittlung der Optimallösung anschließen (*postoptimale Rechnungen*), haben für die Praxis große Bedeutung, da erst eine solche Analyse es häufig ermöglicht, aus linearen Entscheidungsmodellen realitätsrelevante Erkenntnisse abzuleiten. Während die erforderlichen Daten linearer Entscheidungsmodelle determiniert sein müssen, lassen sich mit Hilfe der *parametrischen linearen Planungsrechnung* für einzelne Daten *Streuungsbereiche* ermitteln, in denen die Daten ohne Einfluß auf die optimale Lösung variieren können.

Die parametrische lineare Planungsrechnung berücksichtigt Möglichkeiten, daß Koeffizienten des linearen Planungsproblems variieren. Beispielsweise kann die Frage interessieren, ob sich bei der Planung des Produktionsprogramms geringe Verschie-

bungen der Verkaufspreise auf die optimale Mengenkombination auswirken. Zielt die Frage auf die *Empfindlichkeit* einer betrachteten Lösung im Hinblick auf *Veränderungen der Parameter* ab, so liegt ein Problem der *Sensitivitätsanalyse* (*Dinkelbach, W.*, 1969) vor. Bei der Sensitivitätsanalyse (oder auch *Sensibilitätsanalyse*) wird also untersucht, wie stark einzelne Ausgangsdaten variieren dürfen, bis sich die Lösung qualitativ ändert. Bei der *parametrischen Programmierung* werden bestimmte Ausgangsdaten schrittweise variiert und dabei die Auswirkungen auf die Lösung verfolgt. Sensitivitätsanalysen und parametrische Programmierung behandeln also verwandte Fragestellungen.

Meistens werden nur *Änderungen der Zielfunktionskoeffizienten* (g_j-Werte, $j = 1, 2, \ldots, n$), die etwa Deckungsbeiträge oder Kosten wiedergeben, und der *Elemente der rechten Seite* (b_i-Werte, $i = 1, 2, \ldots, m$), also der verfügbaren oder geforderten Kapazitäten, analysiert. Die a_{ij}-Werte stellen im allgemeinen „technische Koeffizienten" dar, die wenig veränderlich sind. Eine Änderung der Koeffizienten a_{ij} führt jedenfalls zu ganz neuen Ungleichungen bzw. Gleichungen (Wegen der Parametrisierung von Koeffizienten der Bedingungsmatrix vgl. *Müller-Merbach, H.*, 1967, S. 341–354).

Im linearen Programm werden daher neue *Variablen, Parameter* genannt, für alle Daten eingeführt, deren Werte sich innerhalb eines *Streuungsbereiches* ändern können oder sollen. Sei es, daß die Daten nur unsicher bekannt sind und man den Einfluß von möglichen Fehlern (z.B. Fehlprognosen) auf das Ergebnis kennen will, sei es, daß die tatsächlichen Daten schwanken und man wissen will, bei welchen Änderungen die ermittelte Lösung noch optimal ist.

In einem linearen Programm können n neue Variablen λ_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) und m neue Variablen μ_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) eingeführt werden. Der lineare Programmansatz für die Maximierungsaufgabe lautet dann:

$$\text{Maximiere } G = (g_1 + \lambda_1)x_1 + (g_2 + \lambda_2)\, x_2 + \ldots + (g_n + \lambda_n)x_n + 0x_{n+1} + \\ + \ldots + 0\, x_{n+m}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} &= b_1 + \mu_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} &= b_2 + \mu_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} &= b_m + \mu_m \\ x_j \geqslant 0 \text{ (für } j = 1,2, \ldots, n + m) \end{aligned}$$

Für solche linearen Programmansätze ergeben sich folgende Fragestellungen:

Wie ändern sich die optimalen Lösungen und der Wert der Zielfunktion in Abhängigkeit von den Parametern $\lambda_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ und $\mu_i (i = 1, 2, \ldots, m)$? Für welche Werte der Parameter λ_j und μ_i erreicht oder übersteigt das Maximum der Zielfunktion einen geforderten Mindestbetrag? (Vgl. *Hadley, G.*, 1962, S. 379 ff.; *Dinkelbach, W.*, 1969; *Saaty, T. L.*, 1959, S. 294–302).

Da eine gleichzeitige Untersuchung des Einflusses aller Daten auf die Lösung unübersichtlich wird, beschränkt man sich in den Beispielen zur parametrischen linearen Programmierung aus Vereinfachungsgründen auf wenige Parameter. Für ein oder zwei Parameter kann die Abhängigkeit leicht graphisch dargestellt werden.

B. Parametrische Planungsrechnung und Sensitivitätsanalyse

1. Variation der Zielfunktion

Eine *Änderung der Koeffizienten der Zielfunktion* bei unveränderten Nebenbedingungen bewirkt eine Verlagerung der Gewinnhyperebene, während das Lösungspolyeder unverändert bleibt.
Es sei wiederum folgendes lineare Programm – Optimierung eines Produktionsprogramms – gegeben (vgl. S. 23):

Maximiere $G = 110x_1 + 160x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

unter den Nebenbedingungen

$$35x_1 + 70x_2 + x_3 = 9.800$$
$$10x_1 + 8x_2 + x_4 = 1.600$$
$$15x_1 + 20x_2 + x_5 = 3.000$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_5 \geqslant 0$$

Die optimale Lösung dieses linearen Programms lautet (vgl. S. 48):

$$x_1 = 40, \quad x_2 = 120, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 240, \quad x_5 = 0 \text{ mit } G = 23.600$$

Hält man im vorstehenden Beispiel den *Deckungsbeitrag* des Produktes P_1 (g_1 = 110) für unsicher (Zahlenbeispiele mit zwei und mehr Parametern in der Zielfunktion befinden sich z.B. bei *Joksch, H. C.*, 1965, S. 108 ff. und *Dinkelbach, W.*, 1969, S. 142 ff.), so erhebt sich die Frage, inwieweit Änderungen dieses Deckungsbeitrages die optimale Lösung beeinflussen. Durch Zuordnung eines Parameters λ_1 zum Deckungsbeitrag des Produktes P_1 entsteht folgender linearer Programmansatz:

Maximiere $G = (110 + \lambda_1)x_1 + 160x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

unter den Nebenbedingungen

$$35x_1 + 70x_2 + x_3 = 9.800$$
$$10x_1 + 8x_2 + x_4 = 1.600$$
$$15x_1 + 20x_2 + x_5 = 3.000$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0$$

Das Simplextableau ist um die Spalte B_o (optimale Basislösung) zu erweitern. In dieser Spalte ist anzugeben, für welche Parameterwerte λ_1 die jeweilige Basislösung optimal ist. Für die Koeffizienten von λ_1 führt man eine weitere Zeile (unterste Zeile) in das Simplex-Tableau ein. Die „Nullösung" lautet:

Tabelle 44: Tableau I – Simplex-Ausgangstableau – „Nullösung"

x_B	g_i \ Variablen	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS (b_i)	B_o
x_3	0	35	(70)	1	0	0	9.800	für keinen
x_4	0	10	8	0	1	0	1.600	Parameter-
x_5	0	15	20	0	0	1	3.000	wert
$z_j - g_j$		−110 −1	−160 0	0 0	0 0	0 0	G = 0	

Die erste Basislösung mit $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 9.800$, $x_4 = 1.600$, $x_5 = 3.000$ und $G = 0$ bedeutet, daß für keinen Parameterwert λ_1 eine optimale Lösung existiert. Dies ergibt sich bei Anwendung des Simplexkriteriums, da die Differenz $(z_2 - g_2) = - 160$ in der Entscheidungszeile unabhängig von λ_1 stets negativ bleibt. Aus der „RS"-Spalte läßt sich ablesen, daß diese erste Lösung zulässig ist ($x_i \geqslant 0$).
Für $\lambda_1 \leqslant 50$ muß nach der „Steepest Unit Ascent"-Version die Variable x_2 in die Basis eingeführt werden.

Von den Quotienten $q_1 = \frac{9.800}{70} = 140$, $q_2 = \frac{1.600}{8} = 200$, $q_3 = \frac{3.000}{20} = 150$ zeigt der kleinste an, daß die erste Zeile p = 1 die Pivotzeile und $a_{12} = 70$ das Pivotelement ist. Nach der ersten Iteration ergibt sich folgende zulässige Basislösung:

Tabelle 45: Tableau II – Lösung nach der 1. Iteration

x_B	g_i \ Variablen	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS (b_i)	B_o
→ x_2	160	1/2	1	1/70	0	0	140	$\lambda_1 \leqslant -30$
x_4	0	6	0	−8/70	1	0	480	
x_5	0	(5)	0	−2/7	0	1	200	
$z_j - g_j$		−30 −1	0 0	16/7 0	0 0	0 0	G = 22.400	

Die zulässige Basislösung nach der ersten Iteration mit $x_1 = 0$, $x_2 = 140$, $x_3 = 0$, $x_4 = 480$, $x_5 = 200$ und $G = 22.400$ ist wegen $-30 - \lambda_1 \geqslant 0$ zugleich die optimale Lösung des linearen Programms (für den Parameterbereich $\lambda_1 \leqslant -30$; für $\lambda_1 = -30$ existieren unendlich viele Lösungen, die alle den Gewinn $G = 22.400$ garantieren).
Für $\lambda_1 > -30$ oder $-30 - \lambda_1 < 0$ muß nach dem Simplexkriterium x_1 in die Basislösung aufgenommen werden. Da $q_1 = \frac{140}{0{,}5} = 280$, $q_2 = \frac{480}{6} = 80$ und $q_3 = \frac{200}{5} = 40$, heißt die neue Nichtbasisvariable (Nullvariable) x_5; Pivotelement ist $a_{31} = 5$. Es folgt nach der nächsten Iteration die zulässige Basislösung:

Tabelle 46: Tableau III – Lösung nach der 2. Iteration

x_B	g_i \ Variablen	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS (b_i)	B_0
x_2	160	0	1	3/70	0	−1/10	120	$-30 \leqslant \lambda_1 \leqslant 10$
x_4	0	0	0	(8/35)	1	−6/5	240	
→ x_1	110	1	0	−2/35	0	1/5	40	
$z_j - g_j$		0	0	4/7	0	6	$G = 23.600$	
		0	0	−2/35	0	1/5	$+ 40\,\lambda_1$	

Die Lösung nach der zweiten Iteration hat folgende Lösungswerte:
$x_1 = 40$, $x_2 = 120$, $x_3 = 0$, $x_4 = 240$, $x_5 = 0$ und $G = 23.600 + 40\,\lambda_1$

Wegen $\frac{4}{7} - \frac{2}{35}\lambda_1 \geqslant 0$ oder $\lambda_1 \leqslant 10$ und $6 + \frac{1}{5}\lambda_1 \geqslant 0$ oder $\lambda_1 \geqslant -30$ bedeutet diese zulässige Basislösung für den *Parameterbereich* $-30 \leqslant \lambda_1 \leqslant 10$ die optimale Lösung des linearen Programms. (Für $\lambda_1 = -30$ oder $\lambda_1 = 10$ existieren wiederum entsprechend dem Simplexkriterium unendlich viele optimale Lösungen mit $G = 22.400$ bzw. $G = 24.000$).
Dieser *Parameterbereich* garantiert weiter, daß sich der Gewinn gegenüber der Basislösung gemäß Tableau II nicht verringert (untere Grenze von G ist 22.400).
Für $\lambda_1 > 10$ muß x_3 in die Basislösung eingeführt und x_4 entfernt werden, da $q_2 = \frac{240 \cdot 35}{8} = 1.050$ kleiner ist als $q_1 = \frac{120 \cdot 70}{3} = 2.800$. Pivotelement für die dritte Iteration ist $a_{23} = 8/35$. Nach der dritten Iteration erhält man folgende zulässige Basislösung:

Tabelle 47: Tableau IV – Lösung nach der 3. Iteration

x_B	g_i \ Variablen	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS (b_i)	B_o
x_2	160	0	1	0	−3/16	(1/8)	75	$10 \leqslant \lambda_1 \leqslant 90$
→ x_3	0	0	0	1	35/8	−21/4	1.050	
x_1	110	1	0	0	1/4	−1/10	100	
$z_j - g_j$		0	0	0	−5/2	9	G = 23.000	
		0	0	0	1/4	−1/10	+ 100 λ_1	

Die Lösung nach der dritten Iteration lautet:
$x_1 = 100, x_2 = 75, x_3 = 1.050, x_4 = 0, x_5 = 0$ mit $G = 23.000 + 100\,\lambda_1$

Da $-\frac{5}{2} + \frac{1}{4}\lambda_1 \geqslant 0$ oder $\lambda_1 \geqslant 10$ und $9 - \frac{1}{10}\lambda_1 \geqslant 0$ bzw. $\lambda_1 \leqslant 90$ ist, stellt diese zulässige Basislösung in dem Parameterbereich $10 \leqslant \lambda_1 \leqslant 90$ eine optimale Lösung des linearen Programms dar. Für den *Parameterbereich* $\lambda_1 > 90$ hingegen erfüllt diese Basislösung das Simplexkriterium nicht. Wird in einer vierten Iteration x_5 gegen x_2 ausgetauscht, ergibt sich folgende zulässige Basislösung:

Tabelle 48: Tableau V – Lösung nach der 4. Iteration

x_B	g_i \ Variablen	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS (b_i)	B_o
→ x_5	0	0	8	0	−3/2	1	600	$\lambda_1 \geqslant 90$
x_3	0	0	42	1	−7/2	0	6.200	
x_1	110	1	4/5	0	1/10	0	160	
$z_j - g_j$		0	−72	0	11	0	G = 17.600	
		0	4/5	0	1/10	0	+ 160 λ_1	

Die Lösung nach der vierten Iteration lautet:
$x_1 = 160, x_2 = 0, x_3 = 6.200, x_4 = 0, x_5 = 600$ mit $G = 17.600 + 160\,\lambda_1$
Aus $-72 + 4/5\,\lambda_1 \geqslant 0$ oder $\lambda_1 \geqslant 90$ und $11 + 1/10\,\lambda_1 \geqslant 0$ oder $\lambda_1 \geqslant -110$ folgt, daß diese zulässige Basislösung für $\lambda_1 \geqslant 90$ stets optimal ausfällt. Dieser *Parameterbereich* garantiert wiederum, daß sich der Gewinn gegenüber der vorangegangenen Lösung nicht verringert.
Die Ermittlung der Parameterintervalle, für die eine zulässige Basislösung mit m Basisvariablen optimal bleibt, geschieht also unter Anwendung des Simplexkriteriums.

Zusammenfassend ergeben sich für das Zahlenbeispiel folgende Resultate für die Produktionsprogramme I bis V, die sich aus den Simplextableaus I bis V (vgl. Tabellen 44 bis 48) ablesen lassen:

Tabelle 49: **Zusammenstellung der Ergebnisse der parametrischen Programmierung und Sensitivitätsanalyse – Variation der Zielfunktion**

Variablen / Produktionsprogramme	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	G	B_o
I	0	0	9.800	1.600	3.000	0	für keinen Parameterwert
II	0	140	0	480	200	22.400	$-\infty \leqslant \lambda_1 \leqslant -30$
III	40	120	0	240	0	$23.600 + 40 \cdot \lambda_1$	$-30 \leqslant \lambda_1 \leqslant 10$
IV	100	75	1.050	0	0	$23.000 + 100 \cdot \lambda_1$	$10 \leqslant \lambda_1 \leqslant 90$
V	160	0	6.200	0	600	$17.600 + 160 \cdot \lambda_1$	$90 \leqslant \lambda_1 \leqslant \infty$

Den verschiedenen Parameterintervallen von λ_1 entsprechen Intervalle des Deckungsbeitrages $g_1' = 110 + \lambda_1$ von Produkt P_1, die das jeweilige optimale Produktionsprogramm nicht beeinflussen (Sensitivitätsanalyse). Somit sind optimal:

(1) Produktionsprogramm II (vgl. Tabelle 45) mit $x_1 = 0$ und $x_2 = 140$ für die Stückdeckungsbeiträge $g_1' \leqslant 80$ ($g_1 + \lambda_1 \leqslant 80; g_1 = 110; \lambda_1 \leqslant -30$) bei einem Gewinn von G = 22.400. (Aus ökonomischen Gründen dürfte $\lambda_1 = -110$ die unterste Grenze bereits darstellen, weil ein negativer Deckungsbeitrag im allgemeinen auch kurzfristig nicht akzeptiert werden kann.) Das Produktionsprogramm II entspricht dem Eckpunkt A des konvexen Polyeders (Lösungsraums) gem. Abb. 2. Der angegebene Parameterbereich gibt die zulässige Änderung der Steigung der Gewinngeraden an, für die der Eckpunkt A noch optimal bleibt.

(2) Produktionsprogramm III (vgl. Tabelle 46) mit $x_1 = 40$, $x_2 = 120$ für die Stückdeckungsbeiträge g_1' von 80 bis 120 ($80 \leqslant g_1 + \lambda_1 \leqslant 110; g_1 = 110; -30 \leqslant \lambda_1 \leqslant 10$) bei einer Gewinnspanne von G = 23.600 + 40 (−30) = 22.400 bis G = 23.600 + 40 · 10 = 24.000. Für $\lambda_1 = 0$ stimmt das Produktionsprogramm mit dem Endtableau des Ausgangsproblems überein (vgl. Tabelle 4). Es entspricht Eckpunkt B des konvexen Polyeders gem. Abb. 2. Der angegebene Parameterbereich gibt wiederum die zulässige Änderung der Steigung der Gewinngeraden an, für die der Eckpunkt B noch optimal bleibt.

(3) Produktionsprogramm IV (vgl. Tabelle 47) mit $x_1 = 100$, $x_2 = 75$ für die Stückdeckungsbeiträge g_1' von 120 bis 200 ($120 \leqslant g_1 + \lambda_1 \leqslant 200; g_1 = 110; 10 \leqslant \lambda_1 \leqslant 90$) bei einer Gewinnspanne von G = 23.000 + 100 · 10 = 24.000 bis G = 23.000 + 100 · 90 = 32.000. Das Programm entspricht Eckpunkt C des konve-

xen Polyeders gem. Abb. 2. Der angegebene Parameterbereich zeigt wieder die zulässige Änderung der Steigung der Gewinngeraden an, für die der Eckpunkt C noch optimal bleibt.

(4) Produktionsprogramm V (vgl. Tabelle 48) mit $x_1 = 160$, $x_2 = 0$ für die Stückdeckungsbeiträge $g_1' \geqslant 200$ ($200 \leqslant g_1 + \lambda_1$; $g_1 = 110$; $\lambda_1 \geqslant 90$) bei einem Gewinn $G \geqslant 17.600 + 160 \cdot 90 = 32.000$. Dieses Programm entspricht Eckpunkt D des zulässigen Lösungsraumes gem. Abb. 2. Der ermittelte Parameterbereich gibt wieder die zulässige Änderung der Steigung der Gewinngeraden an, für die der Eckpunkt D noch optimal bleibt.

Will der Betrieb z.B. einen Gewinn von G = 25.000 Geldeinheiten in der Planperiode erzielen, so müßte er das Produktionsprogramm IV verwirklichen. Wegen $23.000 + 100 \cdot \lambda_1 = 25.000$ bzw. $\lambda_1 = 20$ wird er den gewünschten Gewinn aber nur bei einem Stückdeckungsbeitrag von $110 + \lambda_1 = 110 + 20 = 130$ Geldeinheiten für Produkt P_1 erzielen.

Das Beispiel zeigt als wesentliche Merkmale eines linearen parametrischen Programms (*Münstermann, H.*, 1969, S. 230):

(1) Die Zahl der verschiedenen Parameterintervalle ist endlich.

(2) Die Parameterintervalle sind zusammenhängend, d.h. lückenlos.

(3) Eine zulässige Basislösung bleibt bis auf die beiden Randintervalle für ein abgeschlossenes Parameterintervall optimal. Die beiden Randintervalle schließen den Parameterbereich gegen $+\infty$ und $-\infty$ ab.

(4) Bis auf die Grenzen $\pm\infty$ geben alle übrigen Grenzen der Parameterbereiche Parameterwerte an, für die unendlich viele optimale Basislösungen existieren können.

2. Variation der Nebenbedingungen

Für Parameter in der Zielfunktion lassen sich mit Hilfe des Simplexkriteriums Parameterintervalle bestimmen, für die die jeweilige zulässige Basislösung optimal bleibt. Werden aber ***Parameter in den Nebenbedingungen*** für die ***Elemente der rechten Seite*** (b_i-Werte, i = 1, 2, . . . , m), also für die verfügbaren oder geforderten Kapazitäten (***Parameter im Begrenzungsvektor***) eingeführt, so erfolgt die Bestimmung von ***Parameterbereichen*** anhand der ***Nichtnegativitätsbedingung***, d.h. die Nichtnegativitätsbedingung erlaubt die Bestimmung von Intervallen für die b_i-Werte, in denen eine optimale Basislösung optimal bleibt. Da die Variation von Parametern in den Nebenbedingungen niemals zulässige (nichtoptimale) Basislösungen zu optimalen Basislösungen umgestalten kann, geht man jetzt von ***optimalen Basislösungen*** aus und analysiert, für welche ***Parameterbereiche*** sie ***optimal*** bleiben.

Als Zahlenbeispiel verwenden wir wiederum das obige lineare Programm – Optimierung eines Produktionsprogramms (vgl. S. 23):

Maximiere $G = 110x_1 + 160x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

unter den Nebenbedingungen

$$35x_1 + 70x_2 + x_3 = 9.800$$
$$10x_1 + 8x_2 + x_4 = 1.600$$
$$15x_1 + 20x_2 + x_5 = 3.000$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0$$

Hält man in diesem Beispiel die *Begrenzungskapazität* der Faktorgruppe 1 (Werkstoffkapazität) mit $b_1 = 9.800$ Tonnen in der Planperiode für unsicher (Zahlenbeispiele mit zwei und mehr Parametern im Begrenzungsvektor befinden sich bei *Joksch, H. C.*, 1965, S. 116 ff. und *Dinkelbach, W.* 1969, S. 146 ff.), so erhebt sich die Frage, inwieweit Änderungen dieser Kapazität die optimale Lösung beeinflussen. Durch Zuordnung eines Parameters μ_1 zur Kapazität b_1 entsteht folgender Ansatz für die erste Nebenbedingung:

$$35x_1 + 70x_2 + x_3 = 9.800 + \mu_1$$

Das Simplextableau ist um eine Spalte für die Koeffizienten des Parameters μ_1 sowie um die Spalte B_z (zulässige Basislösung) zu erweitern. In dieser Spalte B_z wird angegeben, für welche Parameterwerte von μ_1 die jeweilige Basislösung zulässig ist.

Die „Nullösung" lautet:

Tabelle 50: Tableau I – Simplex-Ausgangstableau – „Nullösung"

x_B	g_i \ Variablen	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS b_i	RS μ_1	B_z
x_3	0	35	(70)	1	0	0	9.800	1	für $\mu_1 \geqslant -9.800$
x_4	0	10	8	0	1	0	1.600	0	
x_5	0	15	20	0	0	1	3.000	0	
$z_j - g_j$		−110	−160	0	0	0	G = 0		

Die Parameter μ_i beeinflussen die Entscheidungszeile $(z_j - g_j)$ des Simplextableaus nicht. Es können also auch keine μ_1-Werte existieren, die diese zulässige Basislösung optimal werden lassen. Für $\mu_1 \geqslant -9.800$ ist die Basisvariable $x_3 = 9.800 + \mu_1$ nichtnegativ, die Basislösung mit $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 9.800 + \mu_1$, $x_4 = 1.600$, $x_5 = 3.000$ und G = 0 immer zulässig.

Da negative Schattenpreise vorhanden sind, ist die Lösung nicht optimal. Nach Einführung von x_2 in die Basislösung anstelle von x_3 ergibt sich folgende Lösung:

Tabelle 51: Tableau II – Lösung nach der 1. Iteration

x_B	g_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS b_i	RS μ_1	B_z
→ x_2	160	1/2	1	1/70	0	0	140	1/70	$-9.800 \leqslant \mu_1$
x_4	0	6	0	−8/70	1	0	480	−8/70	$\mu_1 \leqslant 700$
x_5	0	(5)	0	−2/7	0	1	200	−20/70	
$z_j - g_j$		−30	0	16/7	0	0	$G = 22.400 + \frac{16}{7}\mu_1$		

Die Basisvariablen $x_2 = 140 + \frac{1}{70}\mu_1$, $x_4 = 480 - \frac{8}{70}\mu_1$ und $x_5 = 200 - \frac{2}{7}\mu_1$ nehmen für $140 + \frac{1}{70}\mu_1 \geqslant 0$ oder $\mu_1 \geqslant -9.800$ bzw. $480 - \frac{8}{70}\mu_1 \geqslant 0$ oder $\mu_1 \leqslant 4.200$ bzw. $200 - \frac{2}{7}\mu_1 \geqslant 0$ oder $\mu_1 \leqslant 700$ nichtnegative Werte an. Im *Parameterbereich* $-9.800 \leqslant \mu_1 \leqslant 700$ ist mithin die Basislösung $x_1 = 0$, $x_2 = 140 + \frac{1}{70}\mu_1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 480 - \frac{8}{70}\mu_1$, $x_5 = 200 - \frac{2}{7}\mu_1$ mit $G = 22.400 + \frac{16}{7}\mu_1$ stets zulässig, aber wegen $z_1 - g_1 = -30$ (negativer Schattenpreis) nicht optimal.

Die zweite Iteration führt zu folgender Lösung:

Tabelle 52: Tableau III – Lösung nach der 2. Iteration

x_B	g_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS b_i	RS μ_1	B_z
x_2	160	0	1	3/70	0	−1/10	120	3/70	$-1.050 \leqslant \mu_1$
x_4	0	0	0	8/35	1	−6/5	240	8/35	$\mu_1 \leqslant 700$
→ x_1	110	1	0	(−2/35)	0	1/5	40	−2/35	
$z_j - g_j$		0	0	4/7	0	6	$G = 23.600 + \frac{4}{7}\mu_1$		

Die zulässige Basislösung mit $x_1 = 40 - \frac{4}{70}\mu_1$, $x_2 = 120 + \frac{3}{70}\mu_1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 240 + \frac{16}{70}\mu_1$, $x_5 = 0$ und $G = 23.600 + \frac{4}{7}\mu_1$ stellt zugleich eine optimale Lösung dar. Aus $40 - \frac{4}{70}\mu_1 \geqslant 0$ oder $\mu_1 \leqslant 700$, $120 + \frac{3}{70}\mu_1 \geqslant 0$ oder $\mu_1 \geqslant -2.800$ und $240 + \frac{16}{70}\mu_1 \geqslant 0$ oder $\mu_1 \geqslant -1.050$ läßt sich der *Parameterbereich* für μ_1 ermitteln ($-1.050 \leqslant \mu_1 \leqslant 700$), in welchem diese Basislösung zulässig und optimal ist.

Bei $\mu_1 > 700$ erhält x_1 negative Werte. Diese Basislösung wäre dann unzulässig (Nichtnegativitätsbedingung). Die Variable x_1 ist gegen eine Nichtbasisvariable so auszutauschen, daß die neue Basislösung für $\mu_1 > 700$ optimal ist; dies ermöglicht die Nichtbasisvariable x_3:

Tabelle 53: Tableau IV – Lösung nach der 3. Iteration

x_B	Variablen / g_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS b_i	RS μ_1	B_z
x_2	160	3/4	1	0	0	1/20	150	0	$\mu_1 \geqslant 700$
x_4	0	4	0	0	1	−2/5	400	0	
→ x_3	0	−35/2	0	1	0	−7/2	−700	1	
$z_j - g_j$		10	0	0	0	8	G = 24.000		

Die zulässige Lösung mit $x_1 = 0$, $x_2 = 150$, $x_3 = -700 + \mu_1$, $x_4 = 400$, $x_5 = 0$ und $G = 24.000$ ist für $\mu_1 \geqslant 700$ stets optimal.

Für $\mu_1 < -2.800$ wird entsprechend Simplextableau III (Tabelle 52) die Nichtnegativitätsbedingung von x_2 verletzt. Tauscht man in Tableau III die Basisvariable x_2 gegen die Nichtbasisvariable x_5 aus, so bleibt die neue Basislösung für $\mu_1 \leqslant -4.200$ wiederum optimal (Iteration im Anschluß an Tableau III mit $a_{15} = -1/10$ als Pivotelement):

Tabelle 54: Tableau V – Lösung nach der 4. Iteration

x_B	Variablen g_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS b_i	RS μ_1	B_z
→ x_5	0	0	−10	−3/7	0	1	−1.200	−3/7	$-9.800 \leqslant \mu_1$
x_4	0	0	−12	−22/35	1	0	−1.200	−10/35	$\mu_1 \leqslant -4.200$
x_1	110	1	2	1/35	0	0	280	1/35	
$z_j - g_j$		0	60	22/7	0	0	$G = 30.800 + \frac{22}{7}\mu_1$		

Im *Parameterbereich* $-9.800 \leqslant \mu_1 \leqslant -4.200$ ist die Basislösung $x_1 = 280 + \frac{1}{35}\mu_1$, $x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = -1.200 - \frac{10}{35}\mu_1, x_5 = -1.200 - \frac{3}{7}\mu_1$ mit $G = 30.800 + \frac{22}{7}\mu_1$ optimal. Dies folgt aus $-1.200 - \frac{3}{7}\mu_1 \geqslant 0$ oder $\mu_1 \leqslant -2.800$ bzw. $-1.200 - \frac{10}{35}\mu_1 \geqslant 0$ oder $\mu_1 \leqslant -4.200$ und $280 + \frac{1}{35}\mu_1 \geqslant 0$ oder $\mu_1 \geqslant -9.800$ sowie aus den nichtnegativen Koeffizienten der Entscheidungszeile.

Die drei letzten Lösungen (Tableau III bis V – vgl. Tabelle 52 bis 54 –) sind für die Parameterbereiche

Tableau III: $-1.050 \leqslant \mu_1 \leqslant 700$

Tableau IV: $700 \leqslant \mu_1 \leqslant \infty$

Tableau V: $-9.800 \leqslant \mu_1 \leqslant -4.200$

jeweils optimal.

Weitere Iterationen sind möglich. Z.B. könnte noch die Basisvariable x_4 gegen die Nichtbasisvariable x_2 oder x_3 ausgetauscht werden.

Mit Hilfe des Simplexkriteriums und der Nichtnegativitätsbedingung lassen sich die Rechenregeln des Simplex-Algorithmus mit Erfolg auch zur parametrischen Programmierung und Sensitivitätsanalyse bei linearen Programmen einsetzen. Der gegenüber linearen Programmen zusätzlich anfallende Rechenaufwand hält sich in Grenzen, solange die Zahl der Parameter nicht zu groß ausfällt. Bei Verwendung von EDV-Anlagen nimmt die Rechenzeit nur unwesentlich zu (*Münstermann, H.*, 1969, S. 235; *Schreiter, D.*, 1964, S. 1324).

Für das Zahlenbeispiel ergeben sich zusammengefaßt folgende Ergebnisse (Tableau I bis V – vgl. Tabellen 50 bis 54 –):

Tabelle 55: Zusammenstellung der Ergebnisse der parametrischen Programmierung und Sensitivitätsanalyse – Variation der Nebenbedingungen

Variablen / Produktionsprogramm	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	G	B_z	B_o
I	0	0	$9.800 + \mu_1$	1.600	3.000	0	$\mu_1 \geq -9.800$	für keinen Parameterwert
II	0	$140 + \frac{1}{70} \mu_1$	0	$480 - \frac{4}{35} \mu_1$	$200 - \frac{2}{7} \mu_1$	$22.400 + \frac{16}{7} \mu_1$	$-9.800 \leq \mu_1 \leq 700$	für keinen Parameterwert
III	$40 - \frac{2}{35} \mu_1$	$120 + \frac{3}{70} \mu_1$	0	$240 + \frac{8}{35} \mu_1$	0	$23.600 + \frac{4}{7} \mu_1$	$-1.050 \leq \mu_1 \leq 700$	$-1.050 \leq \mu_1 \leq 700$
IV	0	150	$-700 + \mu_1$	400	0	24.000	$700 \leq \mu_1 \leq \infty$	$700 \leq \mu_1 \leq \infty$
V	$280 + \frac{1}{35} \mu_1$	0	0	$-1.200 - \frac{10}{35} \mu_1$	$-1.200 - \frac{3}{7} \mu_1$	$30.800 + \frac{22}{7} \mu_1$	$-9.800 \leq \mu_1 \leq -4.200$	$-9.800 \leq \mu_1 \leq -4.200$

VII. Weiterführende Probleme der linearen Planungsrechnung

A. Ganzzahlige Planungsrechnung

Es gibt eine große Zahl von betrieblichen Planungsproblemen, bei denen die zu berechnenden Mengen nicht beliebig teilbar sind und somit für die Variablen *ganzzahlige Werte* verlangt werden. Dies gilt beispielsweise für die Investitionsplanung (Unteilbarkeit von Projekten und Abhängigkeiten zwischen Projekten), wenn nur *ganze Anzahlen* von Maschinen und Anlagen zur Disposition stehen (vgl. z.B. *Schneider, D.*, 1975, S. 382 ff.; *Laux, H.*, 1971, S. 51 ff.; *Albach, H.*, 1960, S. 526 ff.; *Hax, H.*, 1964, S. 430 ff.; *Hax, H.*, 1972, S. 72 ff.; *Blohm, H., Lüder, K.*, 1978, S. 230 ff., *Kilger, W.*, 1973, S. 131 ff.); für die Personal- und Maschineneinsatzplanung, wenn nur *ganze Zahlen* von Bedienungspersonal und Maschinen für bestimmte Aufträge oder Projekte eingesetzt werden können (*Zuordnungsplanung*). Weiterhin gilt dies für die Standortbestimmung und die Planung von Montageproblemen, wenn ganzzahlige Mengenrelationen zwischen den Endprodukten, Baugruppen und Einzelteilen bestehen.

Die Lösungen, die sich z.B. für lineare Probleme mit Hilfe der Simplexmethode ergeben, enthalten im allgemeinen nichtganzzahlige Variablenwerte und sind damit hinsichtlich der *Ganzzahligkeitsbedingung* nicht zufriedenstellend. Zu den Nebenbedingungen eines linearen Programmansatzes in Form von Ungleichungen und Gleichungen tritt bei der ganzzahligen Programmierung für einige („gemischt ganzzahlig" genannt) oder alle Hauptvariablen (Strukturvariablen) die Ganzzahligkeitsbedingung (*ganzzahlige oder diskrete Programmierung*). Eine Sondergruppe der ganzzahligen Programmierung bilden die sog. „0–1"-Probleme. Hier dürfen die Variablen mit Ganzzahligkeitsbedingung nur die Werte Null oder Eins annehmen. „So perfekt die Optimierungsmodelle der ganzzahligen Planungsrechnung auch sein mögen, leiden sie doch an einem Handicap, durch das sie den Praktikern verleidet werden. Sie lassen sich nämlich, von wenigen Ausnahmen abgesehen, mit wirtschaftlich vertretbarem Rechenaufwand nicht mehr lösen, sobald sie eine gewisse Größe überschritten haben" (*Müller-Merbach, H.*, 1973, S. 366).

Für die Bestimmung der optimalen ganzzahligen Lösung eines Problems der linearen Programmierung sind spezielle Lösungsalgorithmen entwickelt worden. Sie lassen sich in drei Gruppen einteilen: Schnitt-Hyperebenen-Verfahren, Branch-and-Bound-Verfahren und heuristische Verfahren.

Auf *Gomory* geht das Schnitthyperebenen-Verfahren zurück. Dabei wird durch die Einführung von Schnittebenen der ursprüngliche Bereich der Restriktionen iterativ eingeengt. Diese Einengung geschieht mit dem Ziel, die optimale Lösung des immer enger begrenzten zulässigen Bereichs auf einen ganzzahligen Wert fällt (*Gomory, R. E.*, 1963, I, S. 269 ff. und 1963, II, S. 193 ff.).

Das von *A. H. Land* und *A. G. Doig* veröffentlichte Verfahren versucht ausgehend von der optimalen nichtganzzahligen Lösung durch sukzessive Einführung von einzelnen ganzzahligen Wer-

ten für die Variablen die optimale ganzzahlige Lösung zu ermitteln (1960, S. 497 ff.). Dieser Ansatz, wie auch die ähnlichen Ansätze von *Dakin, Balas* u.a. (*Dakin, R. J.*, 1963, S. 250 ff.; *Balas, E.*, 1965, S. 517 ff.) können den Branch-and-Bound-Verfahren zugeordnet werden.
Die heuristischen Verfahren (Näherungsverfahren) führen im allgemeinen nur zu suboptimalen ganzzahligen Lösungen. Sie haben dafür den Vorteil von meist kürzeren Rechenzeiten.
Die Verfahren und die Anwendung der ganzzahligen Planungsrechnung werden in der Literatur eingehend beschrieben (vgl. *Piehler, J.*, 1970; *Dantzig, G. B.*, 1966, S. 583 ff.; *Burkard, R. E.*, 1972; *Müller-Merbach, H.*, 1973, S. 366 ff.; *Greenberg, H.*, 1971; *Hadley, G.*, 1969, S. 305 ff.; *Hu, T. C.*, 1969; *Schmitz, P., Schönlein, A.*, 1978, S. 86 ff., *Bol, G.*, 1980.

B. Stochastische lineare Planungsrechnung

Die *stochastische lineare Planungsrechnung* bietet Ansätze für solche Planungsprobleme, in deren Zielfunktion oder Nebenbedingungen Koeffizienten mit stochastischem Charakter auftreten. Stochastische Koeffizienten in der Zielfunktion (z.B. bei Preisschwankungen) ermöglichen die Angabe von Wahrscheinlichkeiten dafür, daß einzelne Basislösungen optimal sind. Sind hingegen stochastische Koeffizienten in den Nebenbedingungen (z.B. bei Unsicherheit der Absatzmarktlage in den Absatzrestriktionen) enthalten, lassen sich für die Zulässigkeit einzelner Basislösungen nur Wahrscheinlichkeiten angeben. Wegen der besonderen Problematik der stochastischen linearen Programmierung wird auf die Spezialliteratur verwiesen (vgl. *Charnes, A., Cooper, W. W.*, 1960, S. 73 ff.; *Müller, O.*, 1967, S. 299 ff.; *Tintner, G., 1965, S. 108 ff., Zimmermann, H.-J.*, 1971, S. 78 ff.; *Faber, M. M.*, 1970; *Kall, P.*, 1968, S. 81 ff.; *Shephard, R. W.*, 1964, S. 68 ff., *Bühler, W., Dick, R.*, 1972, S. 677–692). Über die stochastische Programmierung sind bisher nur selten praktische Anwendungen bekanntgeworden.

Übungsfragen zu den Abschnitten IV bis VII

1. Was versteht man unter Dualität in der linearen Planungsrechnung und was besagt das Dualitätstheorem?
2. Welche formalen Verknüpfungen bestehen zwischen Primalproblem und dazugehörigem Dualproblem?
3. Worin unterscheidet sich die duale Simplexmethode von der primalen Simplexmethode?
4. Wie lassen sich die Beziehungen zwischen Primal- und dazugehörigem Dualproblem ökonomisch interpretieren?
5. Welche Ziele können mit postoptimalen Rechnungen bei der linearen Planungsrechnung verfolgt werden?
6. Was versteht man unter parametrischer linearer Planungsrechnung und Sensitivitätsanalyse?
7. Wie lassen sich Sensitivitätsanalysen für Änderungen der Koeffizienten der Zielfunktion mit Hilfe der Simplexmethode durchführen?
8. Wozu führen Änderungen der Koeffizienten a_{ij} (z.B. der technischen Koeffizienten) eines Gleichungs- oder Ungleichungssystems in der linearen Planungsrechnung?
9. Wie lassen sich Sensitivitätsanalysen für Änderungen in den verfügbaren oder geforderten Kapazitäten (für Änderungen der Elemente der „rechten Seite“) mit Hilfe der Simplexmethode durchführen?
10. Was versteht man unter Ganzzahligkeitsbedingung und welche Probleme bestehen im Hinblick auf deren Berücksichtigung?

VIII. Transportmethode

Es gibt Probleme der linearen Planungsrechnung, zu deren Lösung Spezialansätze ohne Einsatz der Simplexmethode verwendet werden. Dazu gehören das *Transportproblem* und das *Zuordnungsproblem.*

A. Formulierung und Darstellung des Transportproblems

Das *Transportproblem* in einfacher Form liegt vor, wenn es einerseits verschiedene Erzeuger, Versandlager oder Angebotsorte als *Anbieter* i (i = 1, 2, . . . , m) eines *homogenen Gutes* und auf der anderen Seite verschiedene Verbraucher, Beschaffungslager oder Nachfrageorte als *Nachfrager* j (j = 1, 2, . . . , n) nach diesem homogenen Gut auftreten. Beim Transportproblem geht es also um die *optimale Verteilung homogener Güter* von mehreren Anbietern (oder Angebotsorten) an verschiedene Abnehmer (oder Bedarfsorte). Die angebotenen (verfügbaren) Mengen werden mit a_i, die nachgefragten Mengen mit b_j bezeichnet. Gefragt ist nach derjenigen Verteilung der in Betracht kommenden Güter, bei der die *Gesamttransportkosten* oder die Transportzeit *minimiert* oder *die Transportleistung maximiert* wird. Dabei kann jeder Anbieter (Angebotsort) grundsätzlich an jeden Nachfrager (Bedarfsort) liefern. Bei der *Transportkostenminimierungsaufgabe* sind die Transportstückkosten c_{ij} konstant (lineare Zielfunktion). Mit c_{ij} werden die Transportkosten für die Beförderung einer Mengeneinheit über die Distanz von i nach j bezeichnet. Die Werte c_{ij} sind bekannt. Nach Möglichkeit ist die gesamte Angebotsmenge a_i bzw. die gesamte Nachfragemenge b_j zu befördern. Die Transportplanung soll bestimmen, welche Nachfrageorte von welchen Angebotsorten mit den Mengen x_{ij} zu beliefern sind. x_{ij} sind die (zunächst unbekannten) Transportmengen von i nach j (Entscheidungsvariablen des Problems).

Das *mathematische Modell* weist die gleiche Struktur auf wie die bereits behandelten Modelle der linearen Planungsrechnung. Das Transportproblem kann in seiner mathematischen Struktur als Spezialfall des allgemeinen Problems der linearen Planungsrechnung aufgefaßt werden. Es läßt sich daher grundsätzlich auch mit der Simplexmethode lösen. Auf Grund einiger spezifischer, besonders einfacher Eigenarten des Transportproblems (z.B. Verteilung „homogener" Güter, die Koeffizienten der zu bestimmenden Variablen des Gleichungssystems, welches die Gegebenheiten des Transportproblems wiedergibt, sind sämtlich Eins) läßt es sich mit Hilfe eines speziellen *Transportalgorithmus* jedoch rationeller lösen. Wird zunächst unterstellt, daß die Bedarfsmengen b_j den Angebotsmengen a_i entsprechen, ergibt sich folgender Modellansatz (geschlossenes Transportproblem):

Zielfunktion

$$
\begin{aligned}
\text{Minimiere } K = \; & c_{11} x_{11} + c_{12} x_{12} + \ldots + c_{1n} x_{1n} + \\
& + c_{21} x_{21} + c_{22} x_{22} + \ldots + c_{2n} x_{2n} + \\
& \ldots \\
& + c_{m1} x_{m1} + c_{m2} x_{m2} + \ldots + c_{mn} x_{mn}
\end{aligned}
$$

oder mit Summenzeichen

$$\text{Minimiere } K = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

unter den Nebenbedingungen

(1) Angebotsgleichungen:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (\text{für alle Angebotsorte } i = 1, 2, \ldots, m)$$

(2) Nachfragegleichungen:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (\text{für alle Nachfrageorte } j = 1, 2, \ldots, n)$$

(3) Gesamtangebot und Gesamtnachfrage gleichen sich aus:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

(Das Transportproblem heißt *geschlossen,* wenn sich Gesamtangebot und Gesamtnachfrage ausgleichen. Bei unausgeglichenem Zustand liegt ein *offenes Transportproblem* vor. Lösungsverfahren werden nur für das geschlossene Problem erarbeitet. Die offenen Probleme lassen sich leicht in geschlossene Modelle umwandeln (s. S. 130 ff.).

(4) Da nur nichtnegative Transportmengen möglich sind, gilt schließlich die Nichtnegativitätsbedingung:

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad (\text{für alle } i \text{ und } j)$$

Die *Transportmethode* wurde speziell zur Lösung komplizierter Transportprobleme – wie z.B. die optimale Verteilung von Schiffstonnage von Häfen mit Angebot an ungenutzter Tonnage an Häfen mit Bedarf an leerem Schiffsraum – entwickelt. In erster Linie ging es also bei der Entwicklung der Transportmethode um die Lösung praktischer Fragestellungen. Ein berühmtes Anwendungsbeispiel der Transportmethode „stellt beispielsweise die Luftbrückenoperation für die Belieferung der Stadt

Berlin zur Zeit der russischen Blockade dar" (*Dorfman, R.*, u.a., 1958, S. 121 f.). Es hat sich gezeigt, daß die „Transport"-methode in ihrer Verwendbarkeit viel universeller ist, als ihr Name vermuten läßt.
Die *Transportmethode* ist – wie die Simplexmethode – ein *Iterationsverfahren*, das – von einer zulässigen Ausgangslösung ausgehend – *schrittweise* die Optimierung des linearen Programmierungsproblems anstrebt. Dabei bedient man sich der Darstellungsform eines *Matrixtableaus.*
Die folgende *Transportmengenmatrix* ist Teil der Darstellung des Transportproblems:

Tabelle 56: Tableau I – Transportmengenmatrix

nach j / von i		Bedarfsorte						Angebotsmengen a_i
		1	2	...	j	...	n	
Angebotsorte	1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1j}	...	x_{1n}	a_1
	2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2j}	...	x_{2n}	a_2
	.	.						.
	.	.						.
	.	.						.
	i	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{ij}	...	x_{in}	a_i
	.	.						.
	.	.						.
	.	.						.
	m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mj}	...	x_{mn}	a_m
Bedarfsmengen		b_1	b_2	...	b_j	...	b_n	

Zeilenweise gelesen, enthält die *Transportmengenmatrix* die *Angebotsgleichungen der Nebenbedingungen*: die Lieferungen a_i der Angebotsorte i (i = 1, 2, . . . , m), aufgegliedert nach den Transportmengen x_{ij}, an die Bedarfsorte j (j = 1, 2, . . . , n):

$$x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1j} + \ldots + x_{1n} = a_1$$
$$x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2j} + \ldots + x_{2n} = a_2$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mj} + \ldots + x_{mn} = a_m$$

Spaltenweise gelesen, enthält sie die *Bedarfsgleichungen der Nebenbedingungen*: die Bezüge b_j der Bedarfsorte j (j = 1, 2, . . . , n), aufgegliedert nach den Transportmengen x_{ij}, von den Angebotsorten i (i = 1, 2, . . . , m):

$$x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{i1} + \ldots + x_{m1} = b_1$$

$$x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{i2} + \ldots + x_{m2} = b_2$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{in} + \ldots + x_{mn} = b_n$$

Die *Kosten* c_{ij} je transportierter Mengeneinheit von Angebotsort i an Bedarfsort j werden in der sog. *Einheits-Transportkosten-Matrix* dargestellt:

Tabelle 57: Tableau II – Einheits-Transportkosten-Matrix

von i \ nach j		Bedarfsorte 1	2	...	j	...	n
Angebotsorte	1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1j}	...	c_{1n}
	2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2j}	...	c_{2n}
	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
	i	c_{i1}	c_{i2}	...	c_{ij}	...	c_{in}
	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
	m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mj}	...	c_{mn}

Die rechnerische Behandlung des Transportproblems nach der Transportmethode ist in einem Tableau organisiert, welches beide Matrizen vereinigt:

Tabelle 58: Tableau III – Matrix der Transportmethode

von i \ nach j	1	2	...	n	Angebotsmengen a_i
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Bedarfsmengen b_j	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Die Größen c_{ij}, a_i und b_j bleiben bei der Tableauberechnung (bei den Rechenschritten nach der Transportmethode) unverändert, während die Lösungselemente x_{ij} (Entscheidungsvariablen) in Iterationen so verändert werden, daß die Zielfunktion

$$K = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

ein Minimum wird. Dabei sind zulässige Lösungen *Basislösungen* des *Systems von Nebenbedingungsgleichungen*. Wie man zeigen kann, sind n + m – 1 Nebenbedingungsgleichungen des Transportproblems unabhängig (vgl. z.B. Krekó, B., 1970, S. 18 ff.), so daß Basislösungen – also auch die optimale Lösung – immer höchstens n + m – 1 von Null verschiedene Variablenwerte umfassen.

B. Rechenprozeß (Lösungsverfahren)

Das *Lösungsverfahren der Transportmethode* soll anhand des folgenden *Zahlenbeispiels* erörtert werden:
Der Vertriebsleiter eines Industrieunternehmens, das 3 Fabriken (Angebotsorte i = 1, 2, 3,) und 4 Auslieferungslager an geographisch verschiedenen Orten (Bedarfsorte j = 1, 2, 3, 4) besitzt, hat die Aufgabe zu lösen, wie die Fertigungskapazitäten a_i der verschiedenen Fabriken auf die verschiedenen Marktgebiete (Bedarfsorte) verteilt werden sollen. Wir gehen von einer festen Planperiode (Zeitabschnitt ZA) aus und nehmen an, daß der Ausstoß jeder Fabrik und der Bedarf der einzelnen Auslieferungslager dem Vertriebsleiter bekannt sind. Das Problem besteht darin, welche Mengen x_{ij} des homogenen Gutes (z.B. Mineralöl) von welchen Fabriken i an welche Auslieferungslager j transportiert werden sollen, damit die Gesamttransportkosten (während dieser festen Planperiode) minimal sind.

Tabelle 59: **Produktionsmengen der 3 Fabriken (in geeigneten Mengeneinheiten (ME) ausgedrückt):**

Fabrik 1	a_1 = 150 ME/ZA
Fabrik 2	a_2 = 30 ME/ZA
Fabrik 3	a_3 = 120 ME/ZA
	$\sum_{i=1}^{3} a_i$ = 300 ME/ZA

Tabelle 60: Bedarf der 4 Lagerhäuser in ME/ZA:

Auslieferungslager 1	$b_1 = 80$ ME/ZA
Auslieferungslager 2	$b_2 = 30$ ME/ZA
Auslieferungslager 3	$b_3 = 60$ ME/ZA
Auslieferungslager 4	$b_4 = 130$ ME/ZA
	$\sum_{j=1}^{4} b_j = 300$ ME/ZA

Die Transportkosten c_{ij} für den Transport einer ME von Fabrik i an Auslieferungslager j ergeben sich aus nachstehender Einheits-Transportkosten-Matrix in Geldeinheiten (GE) je ME:

Tabelle 61: Einheits-Transportkosten-Matrix

nach j / von i	1	2	3	4
1	34	23	30	22
2	40	41	47	28
3	28	26	38	21

Das lineare Programmierungsmodell zu diesem Beispiel lautet:

Zielfunktion:

Minimiere $K = 34\, x_{11} + 23\, x_{12} + 30\, x_{13} + 22\, x_{14} +$

$+ 40\, x_{21} + 41\, x_{22} + 47\, x_{23} + 28\, x_{24} +$

$+ 28\, x_{31} + 26\, x_{32} + 38\, x_{33} + 21\, x_{34}$

unter den Nebenbedingungen:

(1) Angebotsgleichungen

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 150$

$x_{21} + x_{21} + x_{23} + x_{24} = 30$

$x_{31} + x_{31} + x_{32} + x_{34} = 120$

(2) Bedarfsgleichungen

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 30$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60$

$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 130$

(3) Nichtnegativitätsbedingung

$x_{ij} \geqslant 0$ (für alle i und j)

Die Nebenbedingungen unter *(1)* und *(2)* bilden ein inhomogenes Gleichungssystem mit 7 Gleichungen (3 Angebotsgleichungen und 4 Bedarfsgleichungen) und 12 Unbekannten (5 Freiheitsgrade). Die nichtnegativen Lösungen des Gleichungssystems bilden die Gesamtheit der *zulässigen* Programme (zulässiger Lösungsbereich), aus der eine (oder mehrere gleichwertige) Lösung(en) so ausgewählt werden muß (müssen), daß deren Transportkosten ein Minimum darstellen.
Ein Weg, um die Unbekannten zu bestimmen, wäre das Probieren. Bei einer so einfachen Aufgabe wie der obigen wäre dies sicherlich noch ein gangbarer Weg. Unser Ziel ist es aber, eine allgemein anwendbare Methode zu demonstrieren, die sich auch bei umfangreicheren Problemen bewährt. Bei z.B. 20 Fabriken und 40 Lagerhäusern würde das Gleichungssystem bereits aus 60 Gleichungen mit 800 Unbekannten bestehen. Probieren würde hier also kaum noch zum Ziel führen können.

1. Bestimmung einer zulässigen Ausgangslösung

Es gibt verschiedene Verfahren zur *Bestimmung* einer *ersten zulässigen Ausgangslösung,* die Basislösung des Systems von Nebenbedingungsgleichungen ist (*Gass, S. J.,* 1964, S. 140 ff., dort ist auch in *allgemeiner Form* die Konstruktion einer Basislösung dargestellt.). Die mit Hilfe der verschiedenen Verfahren erzielbaren zulässigen Lösungen unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Nähe zur Optimallösung und damit hinsichtlich der notwendigen Iterationen bis zur optimalen Lösung.

a) Nord-West-Ecken-Verfahren

Das *„Nord-West-Ecken-Verfahren“* gehört zu den einfachsten Verfahren, eine zulässige Ausgangslösung zu bestimmen. Man beginnt von den Entscheidungsvariablen x_{ij} mit dem Element x_{11} der Transportmatrix und belegt es mit der *maximal zulässigen Menge.* Entweder gilt $x_{11} = b_1$, wenn $b_1 \leqslant a_1$, oder $x_{11} = a_1$, wenn $a_1 \leqslant b_1$ ist. In unserem Zahlenbeispiel ist $x_{11} = 80 = b_1$.
Ist $x_{11} = b_1$, wird der Index j um eins erhöht und man geht über zur Variablen x_{12}, die mit der maximal zulässigen Menge belegt wird. Ist hingegen $x_{11} = a_1$, wird der Index i um eins erhöht und die Variable x_{21} mit der maximal zulässigen Menge belegt. Diese Vorgehensweise wird fortgesetzt, bis die Summe der den Variablen zugewiesenen Mengen gleich der gesamten Transportmenge ist. Man beginnt also in dem Feld i = 1 und j = 1 mit x_{11} der Transportmengenmatrix (= „Nord-West-Ecke“) und führt die Mengenzuweisung fortschreitend bis zum Feld i = m und j = n mit x_{mn} der Transportmengenmatrix (= „Süd-Ost-Ecke“) durch.

Für das Zahlenbeispiel ergibt sich folgende erste zulässige Lösung nach dem Nord-West-Ecken-Verfahren:

Tabelle 62: Zulässige Ausgangslösung nach Nord-West-Ecken-Verfahren

von i \ nach j	1	2	3	4	Angebotsmengen a_i
1	$80^{(1)}$	$30^{(2)}$	$40^{(3)}$		150
2			$20^{(4)}$	$10^{(5)}$	30
3				$120^{(6)}$	120
Bedarfsmengen b_j	80	30	60	130	300

Die hochgestellten Markierungsziffern in Klammern geben die Reihenfolge bei der Besetzung an. Die zulässige Lösung lautet:

$$x_{11} = 80;\ x_{12} = 30;\ x_{13} = 40;\ x_{14} = 0;\ x_{21} = 0;\ x_{22} = 0;$$
$$x_{23} = 20;\ x_{24} = 10;\ x_{31} = 0;\ x_{32} = 0;\ x_{33} = 0;\ x_{34} = 120$$

Es sind also $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ Felder (Variablen) belegt (besetzt) worden. Die *besetzten Felder* (mit $x_{ij} > 0$) werden „B-Felder" genannt. Die *unbesetzten (leeren) Felder* (mit $x_{ij} = 0$) werden „L-Felder" genannt. Die Transportkosten dieser Lösung können mit Hilfe der Einheits-Transportkosten-Matrix ermittelt werden (vgl. Tabelle 61):

$$K = 34 \cdot 80 + 23 \cdot 30 + 30 \cdot 40 + 47 \cdot 20 + 28 \cdot 10 + 21 \cdot 120$$
$$\underline{K = 8.350}$$

Das Nord-West-Ecken-Verfahren führt zu einer *ersten zulässigen Ausgangslösung.* Bei diesem Verfahren geht man allerdings willkürlich vor und läßt die Zielfunktion völlig außer acht. Das Nord-West-Ecken-Verfahren ist zwar einfach zu handhaben, doch zeigt sich im Vergleich zu anderen Verfahren, daß die Ausgangsposition (in Bezug auf das Optimierungsziel) einer Lösung nach dem Nord-West-Ecken-Verfahren in der Regel sehr ungünstig ist.

b) Heuristische Verfahren zur Bestimmung einer „guten" zulässigen Ausgangslösung

aa) Matrixminimum- oder Matrixmaximumverfahren

Das *Matrixminimumverfahren* (bei Minimierungsproblemen) folgt dem *Prinzip des besten Nachfolgers.* Man sucht zunächst das Feld in einer „Matrix der Transportmethode" mit dem kleinsten Einheits-Transportkosten-Element (= kostengünstigstes Feld der Gesamtmatrix) und belegt es mit der maximal zulässigen Menge. Man

sucht dann das kostengünstigste Feld der Restmatrix und ordnet diesem Feld die größtmögliche Menge zu usw. bis alle Mengen zugeordnet sind. Das Matrixminimum- oder Matrixmaximumverfahren wird auch als „Verfahren der aufsteigenden Indizes" bezeichnet (*Bloech*, J., 1974, S. 182). Die zulässige ***Ausgangslösung nach dem Matrixminimumverfahren*** für das Zahlenbeispiel lautet:

Tabelle 63: Zulässige Ausgangslösung nach Matrixminimumverfahren

von i \ nach j	1	2	3	4	a_i
1	[34] $50^{(5)}$	[23] $30^{(3)}$	[30] $60^{(4)}$	[22] $10^{(2)}$	150
2	[40] $30^{(6)}$	[41]	[47]	[28]	30
3	[28]	[26]	[38]	[21] $120^{(1)}$	120
b_j	80	30	60	130	300

Die hochgestellten Markierungsziffern geben wieder die Reihenfolge bei der Besetzung an. Die Transportkosten dieser Lösung betragen:

$$K = 34 \cdot 50 + 23 \cdot 30 + 30 \cdot 60 + 22 \cdot 10 + 40 \cdot 30 + 21 \cdot 120$$
$$\underline{K = 8.130}$$

bb) Zeilenfolge- oder Spaltenfolgeverfahren

Ähnlich wie das Matrixminimum- oder Matrixmaximumverfahren geht das *Zeilen-Spalten-Sukzessionsverfahren* (Zeilenfolge- oder Spaltenfolgeverfahren) vor. Hier beginnt man mit der Mengenzuordnung im kostengünstigsten Feld der ersten Zeile (bzw. Spalte) und ordnet die maximal zulässige Menge zu. Das ist im Zahlenbeispiel das Feld i = 1, j = 4 mit $x_{14} = 130$. Da die Zeile (bzw. Spalte) noch eine Restmenge enthält, wird das nächstgünstigste Feld der Zeile (bzw. Spalte) gesucht und wiederum mit der größtmöglichen Menge belegt. Das ist im Zahlenbeispiel $x_{12} = 20$. Dann wird in der zweiten Zeile (bzw. Spalte) das kostengünstigste Feld aus den Spalten (bzw. Zeilen), die noch einen Bedarf (bzw. ein Angebot) aufweisen, aufgesucht und mit der größtmöglichen Menge belegt. Im Beispiel ist das $x_{21} = 30$. Da damit im Beispiel das Angebot der 2. Zeile erfüllt ist, wird aus der dritten Zeile das kostengünstigste Feld aus den Spalten ausgesucht, die noch Bedarf aufweisen, und mit der größtmöglichen Menge belegt: $x_{32} = 10$; $x_{31} = 50$; $x_{33} = 60$.
Es ergibt sich folgende *Ausgangsmatrix:*

Tabelle 64: Zulässige Ausgangslösung nach Zeilenfolgeverfahren

von i \ nach j	1	2	3	4	a_i
1	34	23 $20^{(2)}$	30	22 $130^{(1)}$	150
2	40 $30^{(3)}$	41	47	28	30
3	28 $50^{(5)}$	26 $10^{(4)}$	38 $60^{(6)}$	21	120
b_j	80	30	60	130	300

Die hochgestellten Markierungsziffern geben wieder die Reihenfolge bei der Belegung an. Die Transportkosten dieser Lösung betragen:

$$K = 23 \cdot 20 + 22 \cdot 130 + 40 \cdot 30 + 28 \cdot 50 + 26 \cdot 10 + 38 \cdot 60$$
$$\underline{K = 8.460}$$

Die bisher behandelten Verfahren haben den gleichen Nachteil: der anfänglich hohe Freiheitsgrad wird immer mehr eingeschränkt, so daß trotz guten Beginns am Ende oft sehr ungünstige Zuordnungen hingenommen werden müssen (Das gleiche gilt übrigens auch für das Prinzip des besten Nachfolgers beim „Traveling Salesman Problem"). Dieser Nachteil tritt bei einem von *Vogel* (*Reinfeld*, *N. V.*, *Vogel*, *W. R.*, 1958) entwickelten Verfahren nicht oder nur in geringerem Maße auf.

cc) Vogel's Approximations-Methode

Bei *Vogel's Approximations-Methode (VAM)* werden für jede Zeile und Spalte der Einheits-Transportkosten-Matrix die Kostendifferenzen zwischen dem zweitgünstigsten und dem günstigsten Kostenelement gebildet. Dann wird in der Zeile oder Spalte mit der maximalen Differenz dem Feld mit dem günstigsten Kostenelement die größtmögliche Menge zugeordnet. Anschließend wird diese Vorgehensweise für die verbleibenden Zeilen und Spalten wiederholt, bis alle Mengen zugeordnet sind. Nach VAM erhält man für das Zahlenbeispiel folgende zulässige Lösung:

Tabelle 65: Zulässige Ausgangslösung nach VAM

nach j / von i	1	2	3	4	a_i	Kostendifferenzen der Zeilen
1	[34]	[23] $30^{(5)}$	[30] $60^{(2)}$	[22] $60^{(6)}$	150	23−22=1
2	[40]	[41]	[47]	[28] $30^{(1)}$	30	40−28=12
3	[28] $80^{(3)}$	[26]	[38]	[21] $40^{(4)}$	120	26−21=5
b_j	80	30	60	130	300	
Kostendifferenzen der Spalten	34−28 = 6	26−23 = 3	38−30 = 8	22−21 = 1		

Die hochgestellten Markierungsziffern geben wieder die Reihenfolge bei der Belegung an. Die gebildeten Kostendifferenzen der Zeilen und Spalten zeigen, daß das Kostenelement c_{24} = 28 des Feldes i = 2 und j = 4 an der Bildung der größten Kostendifferenz mit $c_{21} - c_{24} = 40 - 28 = 12$ beteiligt ist. x_{24} ist mithin die maximal zulässige Menge (x_{24} = 30) zuzuordnen. Für die Restmatrix sind wiederum die Kostendifferenzen für alle Zeilen und Spalten zu bilden. Das Kostenelement c_{13} = 30 ist jetzt an der größten Differenz beteiligt. Entsprechend ist x_{13} die größtmögliche Menge zuzuordnen: x_{13} = 60. Von der verbleibenden Restmatrix ist c_{31} = 28 an der größten Differenz beteilig. x_{31} wird mit 80 belegt usw. Die Transportkosten der Lösung nach VAM betragen:

$$K = 23 \cdot 30 + 30 \cdot 60 + 22 \cdot 60 + 28 \cdot 30 + 28 \cdot 80 + 21 \cdot 40$$
$$\underline{K = 7.730}$$

Dieses Verfahren hat den Vorzug, daß nicht die absoluten Kosten für die Zuteilungen maßgebend sind, sondern durch die Differenzenbildung Abhängigkeiten in der Kostenstruktur des Transportproblems berücksichtigt werden. Vogel's Approximationsmethode führt im allgemeinen zu sehr guten Ausgangslösungen, die nahe an das Optimum herankommen (in diesem Beispiel ist die ermittelte Ausgangslösung bereits die Optimallösung; s. S. 127. Dieser Tatbestand ist jedoch nicht zwingend). Allerdings ist der Aufwand zur Ermittlung der Ausgangslösung schon relativ hoch. Es gibt verschiedene andere Ansätze zur Ermittlung einer zulässigen Ausgangslösung – z. B. die Methode der Umformung der Einheits-Transportkosten-Matrix (*Krekó, B.*, 1970, S. 16 ff.), die Frequenzmethode von *J. Habr* (1961, S. 1069 ff.) oder voroptimierende Verfahren (*Müller-Merbach, H.*, 1973, S. 312 f.) –.

2. Problem der Degeneration

Bei der Bestimmung einer zulässigen Lösung kann der Fall auftreten, daß die Summe der belegten Mengen zwar gleich der gesamten Transportmenge ist, jedoch die Anzahl der belegten Elemente (Felder) die Zahl m + n – 1 nicht erreicht. In diesem Fall liegt *Degeneration (Entartung)* vor. Das noch darzustellende Iterationsverfahren der Transportmethode versagt bei „degenerierten" (entarteten) Problemen. Es gibt jedoch ein einfaches Mittel, um die Degeneration zu beheben. Dazu sind so viele freie Elemente (L-Felder) mit *Null als Basisvariable* zu belegen, bis die Zahl der belegten Elemente (= Basisvariablen) gleich m + n – 1 ist. Auch diese mit Null belegten Elemente x_{ij} repräsentieren also Basisvariablen.
Zur Belegung mit Null sind solche freien Elemente auszuwählen, die gewährleisten, daß nach erfolgter Belegung kein Element als *einziges* in einer Zeile *und* Spalte belegt ist. Zahlenbeispiel:

Tabelle 66: Degenerierte Lösung

nach j / von i	1	2	3	4	a_i
1	80	(0)	60	10	150
2		30			30
3				120	120
b_j	80	30	60	130	300

x_{22} = 30 ist das einzige Element, das in der Zeile 2 und Spalte 2 belegt ist. Das Problem ist degeneriert. In der Mengenmatrix ist z.B. das Mengenelement x_{12} mit Null zu belegen. Zur Auswahl stehen die freien Elemente (L-Felder) x_{12}, x_{21}, x_{23}, x_{24} und x_{32} (nicht hingegen x_{31} und x_{33}). Die Auswahl des Elementes, das mit einer Null eine Basisvariable repräsentieren soll, kann durch einen Zufallsmechanismus erfolgen.

3. Iterationsprozeß der Transportmethode

Durch den *Iterationsprozeß der Transportmethode* wird eine Folge von zulässigen Lösungen erzeugt, bei denen die Gesamttransportkosten stets abnehmen, bis das Kostenminimum (Optimallösung) erreicht ist.
Zur Bestimmung der optimalen Lösung des Transportproblems ist eine Reihe von Methoden entwickelt worden. Weit verbreitet ist die *modifizierte Distributionsmethode* (auch MODI-Methode, UV-Methode oder Methode der Potentiale genannt) und die *Stepping-Stone-Methode.*
Sowohl die *MODI-Methode* als auch die *Stepping-Stone-Methode* bauen auf dem Tatbestand auf, daß die optimale Lösung auch eine Basislösung sein muß.

a) Modifizierte Distributionsmethode (MODI-Methode)

Die MODI-Methode besteht entsprechend der Simplexmethode aus:
(1) der Prüfung einer zulässigen Lösung auf Optimalität,
(2) der Auswahl einer in die Basislösung einzuführenden Nichtbasisvariablen,
(3) dem Variablentausch.

Zur Prüfung auf Optimalität dienen die *Opportunitätskosten.* Für die (von Null verschiedenen) Basisvariablen x_{ij} werden im ersten Schritt die *Potentiale* u_i und v_j berechnet:

$$u_i = c_{ij} - v_j$$

$$v_j = c_{ij} - u_i$$

D.h. die u-Werte für die Zeilen und v-Werte für die Spalten werden so festgelegt, daß für die ***besetzten Felder (B-Felder)*** der zulässigen Lösung der Bedingung $u_i + v_j = c_{ij}$ genügt wird. Das ist bei nichtdegenerierten Lösungen immer eindeutig erreichbar, wenn ein Potential (u- oder v-Wert) frei gewählt wird. In der Regel wird $u_1 = 0$ gesetzt. Aus rechentechnischen Gründen ist es zweckmäßig, die Potentiale als zusätzliche Spalte u_i und Zeile v_j der Transportmatrix hinzuzufügen. An unserem Zahlenbeispiel wird die Bildung der Potentiale demonstriert (zulässige Ausgangslösung nach Matrixminimumverfahren, vgl. Tabelle 63, S. 118):

Tabelle 67: Bildung der Potentiale u_i und v_j

von i \ nach j	u_i \ v_j	1	2	3	4	a_i
		34	23	30	22	
1	0	[34] 50	[23] 30	[30] 60	[22] 10	150
2	6	[40] 30	[41]	[47]	[28]	30
3	−1	[28]	[26]	[38]	[21] 120	120
b_j		80	30	60	130	300

Das System von Gleichungen, in dem die c_{ij} der besetzten Felder (Basisvariablen) durch die u_i- und die v_j-Werte ausgedrückt werden, besteht aus sechs Gleichungen mit sieben Unbekannten. Die willkürliche (freie) Festlegung einer Unbekannten (gewöhnlich wird $u_1 = 0$ gesetzt) führt also zu einem Gleichungssystem, in dem die verbleibenden sechs Unbekannten durch einfache Elimination berechnet werden können.

Nebenrechnung (für die c_{ij} kommen nur die besetzten Felder in Frage):

$u_1 = 0$ (frei gewählt)

$v_1 = c_{11} - u_1 = 34 - 0 = 34$ $\quad$ $v_4 = c_{14} - u_1 = 22 - 0 = 22$
$v_2 = c_{12} - u_1 = 23 - 0 = 23$ $\quad$ $u_2 = c_{21} - v_1 = 40 - 34 = 6$
$v_3 = c_{13} - u_1 = 30 - 0 = 30$ $\quad$ $u_3 = c_{34} - v_4 = 21 - 22 = -1$

Den Zeilen und Spalten der zulässigen – auf Optimalität hin zu prüfenden – Lösung werden also die Potentiale (u_i- bzw. v_j-Werte) zugeordnet. Zu jedem Element der Kostenmatrix gehören also zwei Potentiale, ein Zeilenpotential u_i und ein Spaltenpotential v_j. Diese Potentiale werden – wie bereits dargelegt – so bestimmt, daß die Summe der Potentiale, die zu einem besetzten Kostenelement c_{ij} gehören, gleich dem betreffenden Kostenelement c_{ij} sind.

Für die nicht besetzten Elemente x_{ij} (Nichtbasisvariablen; L-Felder) werden im zweiten Schritt die *Opportunitätskosten* oc_{ij} ermittelt. Aus den Potentialen werden zunächst die z_{ij}-Werte gebildet: $z_{ij} = u_i + v_j$. Die Differenzen $c_{ij} - z_{ij}$ sind die oc-Werte für die *Nichtbasisvariablen* (Nullvariablen) (L-Felder): $oc_{ij} = c_{ij} - z_{ij}$. Die Opportunitätskosten oc_{ij} der *Nichtbasisvariablen* sind also die Differenzen aus den Einheits-Transportkosten der Nichtbasisvariablen und den z_{ij}-Werten. Diese Differenzen (*Opportunitätskosten, Schattenpreise*) geben Auskunft über die *Optimalität der vorliegenden Basislösung.* Sind alle Differenzen $(c_{ij} - z_{ij}) \geqslant 0$, so liegt die optimale Lösung vor. Existieren noch negative Differenzen $(c_{ij} - z_{ij}) < 0$, so sind noch Verbesserungen möglich, die Optimallösung ist noch nicht erreicht (= „*Transportkriterium*"). In der *Matrix der Transportmethode* werden die Opportunitätskosten oc_{ij} links unten in die entsprechenden Felder der Nichtbasisvariablen („L-Felder") eingetragen. Für das Zahlenbeispiel ergeben sich folgende oc-Werte (ausgehend von der zulässigen Ausgangslösung nach Matrixminimumverfahren, vgl. Tabelle 63, S. 118):

Tabelle 68: Matrix der Transportmethode mit Potentialen u_i, v_j und Opportunitätskosten oc_{ij}

von i \ nach j	u_i \ v_j	1 34	2 23	3 30	4 22	a_i
1	0	−Δ 34 50	23 30	30 60	+Δ 22 10	150
2	6	40 30	41 + 12	47 +11	28 0	30
3	−1	+Δ 28 −5	26 + 4	38 +9	−Δ 21 120	120
b_j		80	30	60	130	300

Die *negativen Werte der Opportunitätskosten* zeigen an, daß das *Optimum noch nicht vorliegt.* Sie geben an, um wieviel sich die Transportkosten vermindern, wenn das zugehörige Mengenelement x_{ij} (Nichtbasisvariable) mit *einer Einheit* belegt wird. Entsprechend der *„Steepest Unit Ascent"-Version* der Simplexmethode wird auch bei der Transportmethode diejenige Nichtbasisvariable für die Aufnahme in die Lösung ausgewählt, die den größten Zielfunktionsbeitrag pro Mengeneinheit erbringt. Von allen negativen Werten der Opportunitätskosten oc_{ij} wird also der minimale ausgewählt. Die zugehörige Nichtbasisvariable wird mit einem noch zu bestimmenden Wert in die Basislösung aufgenommen. Die Aufnahme einer Nichtbasisvariablen in die Basislösung bedeutet die Belegung des zugehörigen freien Feldes (L-Feldes) in der Transportmengenmatrix und zugleich das Ausscheiden einer bisherigen Basisvariablen. Durch die Besetzung eines L-Feldes muß ein bisher besetztes Feld (B-Feld) frei werden ($m + n - 1$ Basisvariablen). Darüber hinaus hat der Austausch der Variablen zur Lösungsverbesserung so zu erfolgen, daß keine der Beschränkungen a_i bzw. b_j verletzt wird, d.h. die Angebots- und Nachfragegleichungen müssen weiterhin erfüllt bleiben.
Im Zahlenbeispiel ist x_{31} die Nichtbasisvariable mit dem minimalen oc-Wert ($oc_{31} = -5$). Die Nichtbasisvariable x_{31} ist also in die Lösung aufzunehmen, d.h. in der ersten Iteration (Verbesserungsschritt) ist das Feld $i = 3$ und $j = 1$ mit Mengeneinheiten zu belegen. Wird das Feld $i = 3$ und $j = 1$ mit dem Wert Δ belegt ($x_{31} = \Delta$), so muß in der gleichen Zeile ($i = 3$) ein belegtes Feld um Δ vermindert werden. Im Beispiel ist dies das Feld $i = 3$ und $j = 4$ (mit $x_{34} = 120 - \Delta$). Dies ist notwendig, damit die dritte Zeilengleichung wieder erfüllt ist. Diese Verminderung hat eine Vermehrung eines anderen B-Feldes zur Folge und so weiter, bis als letztes ein B-Feld in der gleichen Spalte, in welcher der *Zyklus* (auch *Kreis* genannt) durch Neubelegung begann, um Δ verringert wird. Der Zyklus kann natürlich auch in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen werden. Zu bemerken ist, daß ausgehend von einem L-Feld – also einer Nichtbasisvariablen, die wegen eines negativen oc-Wertes in die Lösung eingeführt werden soll – man bei diesem Zyklus zum selben Element mit einer „Turmbewegung" (nach der Gangart des Turms beim Schachspiel) zurückkehrt, indem man die Richtung immer bei einem B-Feld wechselt (*Krekó, B.*, 1970, S. 22). Bei dem damit gewonnenen *geschlossenen Weg* werden also nur – abgesehen von dem Ausgangsfeld (Nichtbasisvariable, die in die Lösung aufgenommen werden soll) – B-Felder tangiert.
Dieser Weg der Transportmengenänderungen in der Transportmatrix wird auch *„Polygonzug"* genannt. Es läßt sich zeigen, daß es für jedes L-Feld einen einzigen zusammenhängenden Polygonzug gibt (*Bloech, J.*, 1974, S. 186). Entlang der Ecken des geschlossenen Weges wechselt das Vorzeichen für Δ alternierend.
Im Zahlenbeispiel haben folgende Transportmengenänderungen zu erfolgen (vgl. Tabelle 68):

$$x_{31} = +\Delta; \quad x_{34} = 120 - \Delta; \quad x_{14} = 10 + \Delta; \quad x_{11} = 50 - \Delta$$

Welchen Wert soll nun Δ annehmen?
Da die Opportunitätskosten der in die Basislösung aufzunehmenden Variablen angeben, um wieviel sich die Transportkosten vermindern, wenn die zugehörige Va-

riable mit *einer* Mengeneinheit belegt wird, hat Δ den größtmöglichen Wert anzunehmen. Δ kann so groß wie das kleinste Eckelement des geschlossenen Weges sein, von dem Δ abgezogen wird (*Nichtnegativitätsbedingung*). An die Stelle dieses kleinsten zu vermindernden Eckelementes des Zyklus tritt ein freies Feld (L-Feld), die entsprechende Variable wird zur *Nichtbasisvariablen.* Auf diese Weise wird die ***Variable bestimmt, die aus der Lösung auszuscheiden hat,*** d.h. zur *Nullvariablen* wird.

Im Zahlenbeispiel ist x_{11} die neue Nichtbasisvariable (Nullvariable) und $\Delta = 50$. In der ersten Iteration wird also x_{31} mit 50 ME in die Lösung aufgenommen und x_{11} aus der Basislösung eliminiert (Austausch von x_{11} gegen x_{31}). Die Verbesserung einer Iteration beträgt jeweils $oc_{ij} \cdot \Delta$ (oc_{ij} = Opportunitätskosten, die zur Nichtbasisvariablen gehören, die in die Lösung eingeführt, d.h. belegt werden soll). Im Beispiel beläuft sich die Transportkostenminderung der ersten Iteration auf $oc_{31} \cdot \Delta = (-5) \cdot 50 = -250$.

Diese Transportkostenänderung läßt sich auch wie folgt errechnen:

Kostenzunahme:	x_{13} um 50 ME mit 28 GE/ME =	1.400	
	x_{14} um 50 ME mit 22 GE/ME =	1.100	
			+ 2.500
Kostenabnahme:	x_{11} um 50 ME mit 34 GE/ME =	1.700	
	x_{14} um 50 ME mit 21 GE/ME =	1.050	
			− 2.750
	Kostenminderung per Saldo		− 250

Nachdem die Transportkosten der zulässigen Ausgangslösung nach Matrixminimumverfahren $K_1 = 8.130$ (Geldeinheiten (GE) betragen (vgl. Tabelle 63, S. 118), reduzieren sich diese nach der ersten Iteration auf:

$$K_2 = K_1 + oc_{31} \cdot \Delta = 8.130 - 250$$

$$\underline{\underline{K_2 = 7.880}}$$

Die neue Transportmatrix nach der ersten Verbesserung lautet:

Tabelle 69: Matrix der Transportmethode nach der ersten Iteration (mit Potentialen u_i, v_j und Opportunitätskosten oc_{ij})

von i \ nach j		1	2	3	4	a_i
	u_i \ v_j	29	23	30	22	
1	0	[34] +5	[23] 30	[30] 60	[22] 60	150
2	11	−Δ [40] 30	[41] +7	[47] +6	+Δ [28] −5	30
3	−1	+Δ [28] 50	[26] +4	[38] +9	−Δ [21] 70	120
b_j		80	30	60	130	300

Die Transportkosten dieser zulässigen Lösung nach der ersten Iteration betragen:

$$K_2 = 30 \cdot 23 + 60 \cdot 30 + 60 \cdot 22 + 30 \cdot 40 + 50 \cdot 28 + 70 \cdot 21$$
$$\underline{K_2 = 7.880}$$

Da ein oc-Wert noch negativ ist ($oc_{24} = -5$), liegt die optimale Lösung noch nicht vor. Das freie Element x_{24} ist zu belegen, um eine weitere Verbesserung zu erreichen. Der geschlossene Zyklus ist in der obigen Matrix (Tabelle 69) markiert. Δ ist 30 ME. Die seitherige Nichtbasisvariable x_{24} wird mit 30 ME in die Lösung eingeführt und dafür wird x_{21} aus der Lösung herausgenommen. Folgende Mengenänderungen haben in der zweiten Iteration zu erfolgen:

$x_{24} = +30$, $x_{21} = 30 - 30$, $x_{31} = 50 + 30$, $x_{34} = 70 - 30$

Die Transportkostenminderung der zweiten Iteration beläuft sich auf $oc_{24} \cdot \Delta = (-5) \cdot 30 = -150$. Die Transportkosten nach der zweiten Iteration betragen:

$$K_3 = K_2 + oc_{24} \cdot \Delta = 7.880 - 150$$
$$\underline{K_3 = 7.730}$$

Die neue Transportmatrix nach der zweiten Verbesserung (Iteration) lautet:

Tabelle 70: Matrix der Transportmethode nach der zweiten Iteration (mit Potentialen u_i, v_j und Opportunitätskosten oc_{ij}) – Optimallösung

von i \ nach j	u_i \ v_j	1	2	3	4	a_i
		29	23	30	22	
1	0	[34] +5	[23] 30	[30] 60	[22] 60	150
2	6	[40] +5	[41] +12	[47] +11	[28] 30	30
3	−1	[28] 80	[26] +4	[38] +9	[21] 40	120
b_j		80	30	60	130	300

Da alle Opportunitätskosten nichtnegativ sind ($oc_{ij} \geqslant 0$), ist die *optimale (transportkostenminimale) Lösung* erreicht. Die *minimalen Transportkosten* betragen:

$$K_3 = 30 \cdot 23 + 60 \cdot 30 + 60 \cdot 22 + 30 \cdot 28 + 80 \cdot 28 + 40 \cdot 21$$

$$\underline{K_3 = 7.730}$$

Der optimale Transportplan lautet:

Fabrik 1 liefert an Auslieferungslager 2 30 ME ($x_{12} = 30$)
an Auslieferungslager 3 60 ME ($x_{13} = 60$)
an Auslieferungslager 4 60 ME ($x_{14} = 60$)

Fabrik 2 liefert an Auslieferungslager 4 30 ME ($x_{24} = 30$)

Fabrik 3 liefert an Auslieferungslager 1 80 ME ($x_{31} = 80$)
an Auslieferungslager 4 40 ME ($x_{34} = 40$)

Die übrigen x_{ij}-Elemente (der L-Felder) haben als Nichtbasisvariablen den Wert Null.

b) Stepping-Stone-Methode

Zur Erläuterung der *Stepping-Stone-Methode* – sie ähnelt in wesentlichen Punkten der MODI-Methode – gehen wir wieder von der nach Matrixminimumverfahren gefundenen zulässigen Basislösung aus (vgl. Tabelle 63, S. 118). Zunächst werden für alle *nicht besetzten Felder* (L-Felder) der zulässigen Basislösung *Kostendifferenzen* d_{ij} gebildet. Diese Kostendifferenzen werden über *Rundwege (Austausch-*

pfade, Stepping-Stone-Pfade, Zick-Zack-Kurse), die ausschließlich über besetzte Felder (Basisvariablen) führen, berechnet. Die Kostendifferenzen geben Auskunft darüber, ob ein bisher nicht belegtes Feld (Nichtbasisvariable) zu einer Verbesserung (Verminderung der Gesamttransportkosten) beitragen kann. Für negative Kostendifferenzen ($d_{ij} < 0$) sind Verbesserungen möglich. Sind alle Kostendifferenzen positiv ($d_{ij} > 0$), so liegt die optimale Lösung vor (*Transportkriterium*). Ist $d_{ij} = 0$, so existieren mehrdeutige Lösungen (*Mehrfachlösungen*). Nach der „Steepest Unit Ascent"-Version (entsprechend bei der Simplexmethode) wird die Nichtbasisvariable x_{ij} mit dem minimalen Betrag der negativen Kostendifferenzen d_{ij} in die Lösung eingeführt. Eine andere Variable (eine bisherige Basisvariable) muß dafür weichen.

Da die Verbesserung möglichst groß sein soll, wird die neu einzuführende Variable x_{ij} mit der ***größtmöglichen Menge*** belegt. Aus der ***Nichtnegativitätsbedingung*** ($x_{ij} \geqslant 0$ für alle i und alle j) ergibt sich, wie groß die Mengenänderung höchstens sein kann und welche Variable aus der Lösung herauszunehmen ist. Dieses Verfahren wird solange wiederholt, bis alle Kostendifferenzen nichtnegativ sind (Iterationsverfahren).

Die für die L-Felder ermittelten Kostendifferenzen d_{ij} können links unten in die entsprechenden Felder der Nichtbasisvariablen eingetragen werden. Für die Berechnung der Kostendifferenz d_{12} ist der Austauschpfad in Tabelle 71 markiert:

Tabelle 71: Matrix der Transportmethode mit Kostendifferenzen d_{ij}

von i \ nach j	1	2	3	4	a_i
1	34 50	23 30	30 60	22 10	150
2	40 30	41 12	47 11	28 0	30
3	28 −5	26 4	38 9	21 120	120
b_j	80	30	60	130	300

Die Belastung des Feldes i = 3, j = 1 mit *einer* Transportmengeneinheit führt zu Mehrkosten von 28 Geldeinheiten (GE). Da die dritte Zeilengleichung erfüllt sein muß, ist das Mengenelement x_{34} um eine Transportmengeneinheit zu entlasten. Das führt zu einer Kostenersparnis von 21 GE. Damit die Gleichungen der Spalten j = 1

und j = 4 erfüllt werden, muß das Mengenelement x_{14} um eine Mengeneinheit erhöht – Transportkostenzunahme 22 GE – und das Mengenelement x_{11} um eine ME vermindert werden – Transportkostenersparnis 34 GE. Im Gesamtergebnis erhalten wir also durch den Austausch von einer Mengeneinheit auf diesem *Stepping-Stone-Pfad* die Kostendifferenz $d_{31} = 28 - 21 + 22 - 34 = -5$. Würde man also die Variable x_{31} in die Lösung aufnehmen, so würde das pro transportierte Mengeneinheit eine Kostenersparnis von 5 GE bedeuten. Maximal wären 50 ME auf diesem Pfad austauschbar (x_{31} würde mit 50 ME für x_{11} in die Lösung eingeführt). Die übrigen Kostendifferenzen setzen sich wie folgt zusammen:

$d_{22} = 41 - 23 + 34 - 40 = 12$
$d_{23} = 47 - 30 + 34 - 40 = 11$
$d_{24} = 28 - 22 + 34 - 40 = 0$
$d_{32} = 26 - 23 + 22 - 21 = 4$
$d_{33} = 38 - 30 + 22 - 21 = 9$

Die Lösung (gem. Tabelle 71) weist noch eine negative Differenz ($d_{31} = -5$) auf, so daß noch Verbesserungsmöglichkeiten bestehen. In der ersten Iteration ist die Variable x_{31} mit 50 ME in die Lösung einzuführen und dafür x_{11} aus der Lösung herauszunehmen.

Vergleicht man die Tabellen 71 und 68, so zeigt sich, daß die Kostendifferenzen d_{ij} der Stepping-Stone-Methode den Opportunitätskosten oc_{ij} der MODI-Methode entsprechen; lediglich die Berechnungsweise ist verschieden. Im übrigen entspricht die Vorgehensweise nach der Stepping-Stone-Methode der nach der MODI-Methode. Im Vergleich zur Stepping-Stone-Methode ist die MODI-Methode die handlichere.

C. Mehrdeutige Lösungen

Ein Transportproblem muß nicht immer eine eindeutige Lösung haben. Es können *mehrere optimale Lösungen* existieren. Man spricht dann von *Mehrfachlösungen* oder von *mehrdeutigen Lösungen*. Eine Mehrfachlösung ist in der Matrix der Transportmethode dadurch gekennzeichnet, daß oc-Werte, die Nichtbasisvariablen zugeordnet sind, den Wert Null haben. (Die oc-Werte, die Basisvariablen zugeordnet sind, haben immer den Wert Null.) Durch Hereinnahme einer Nichtbasisvariablen in die Lösung, deren zugeordneter oc-Wert Null ist, ändert sich das Kostenniveau nicht (Kostenänderung einer Iteration ist nämlich: $oc \cdot \Delta$; als Beispiel sei auf Tabelle 74 verwiesen). Sind hingegen die zu einem freien Element (einer Nichtbasisvariablen) gehörenden oc-Werte in einem Programm ausnahmslos positiv, so existiert nur eine einzige optimale Lösung.

D. Offene Transportprobleme (fiktive Anbieter und Nachfrager)

Die Anwendung der Transportmethode setzt ein *geschlossenes Transportmodell* voraus. Es muß also das Gesamtangebot $\sum_{i=1}^{m} a_i$ der Gesamtnachfrage (dem Gesamtbedarf) $\sum_{j=1}^{n} b_j$ entsprechen. Bei praktischen Problemen dürfte diese Prämisse wohl kaum erfüllt sein. Vielmehr herrschen in der Praxis die *offenen Transportprobleme* vor, bei denen *Gesamtnachfrage und Gesamtangebot nicht übereinstimmen.* Dabei sind die Fälle *Nachfrage größer als das Angebot* oder *Angebot größer als die Nachfrage* denkbar. Jedes offene Transportproblem läßt sich durch *Einfügen eines fiktiven Anbieters bzw. Nachfragers* in ein *geschlossenes Modell* umwandeln.

1. Fall 1: Angebotsmenge größer als Bedarfsmenge

In diesem Fall wird eine *zusätzliche fiktive Bedarfsstelle* in das Modell aufgenommen, die genau die *überschüssige Angebotsmenge aufnimmt.* Man ergänzt also die Matrix der Transportmethode um eine Nachfragespalte, die den Überhang ausgleicht. Die Vorgehensweise soll demonstriert werden an einem Beispiel, in dem eine *Angebotsauswertung* vorgenommen wird. Dieses Beispiel verdeutlicht auch die Vielfalt der Anwendungsmöglichkeiten der Transportmethode.

Beispiel:
Ein Warenhaus wünscht folgende Posten an Damenkleidern einzukaufen:

Kleidergröße	34	36	38	40	42
Menge in Stück	75	100	250	350	200

Von drei verschiedenen Kleiderfabriken werden Angebote eingeholt. Die Hersteller bieten an, die nachstehenden Mengen an Kleidern liefern zu können:

Kleiderfabrik	A	B	C
Angebotsmenge in Stück	420	400	380

Die Angebotspreise je Kleidergröße und Hersteller sind (in DM je Kleid):

		Kleidergröße				
		34	36	38	40	42
Hersteller	A	100	120	140	160	180
	B	115	140	150	180	190
	C	165	180	185	190	195

Gesucht ist das *kostenminimale Einkaufsprogramm* für das Warenhaus!

Die Angebotsmenge $\sum_{i=1}^{3} a_i = 1.200$ Stück ist um 225 Stück größer als die Nachfragemenge mit $\sum_{j=1}^{5} b_j = 975$ Stück. Für diese Differenz wird eine *fiktive Nachfrage* über 225 Stück Kleider eingeführt. Da es für die fiktive Nachfrage gleichgültig ist, von welchem Hersteller sie gedeckt wird, können die Kostenelemente in dieser fiktiven Spalte gleich groß sein. Es ist am einfachsten, wenn alle diese Kostenelemente gleich Null gewählt werden. Dann bildet sich die optimale Lösung nur in Abhängigkeit der tatsächlichen Angebotspreise. Unter Verwendung des Matrixminimumverfahrens – dabei ist die Spalte der fiktiven Nachfrage erst zu belegen, wenn die anderen Spalten erfüllt sind – ergibt sich folgende zulässige *Ausgangslösung:*

Tabelle 72: Ausgangslösung des Einkaufsprogramms nach Matrixminimumverfahren (mit Potentialen und Opportunitätskosten)

Hersteller \ Kleidergröße		34	36	38	40	42	fiktive Nachfrage	a_i
	u_i \ v_j	100	120	140	170	180	−15	
A	0	[100] 75	[120] 100	−Δ [140] 245	+Δ [160] (−10)	[180] (0)	[0] (15)	420
B	10	[115] (5)	[140] (10)	+Δ [150] 5	−Δ [180] 350	[190] 45	[0] (5)	400
C	15	[165] (50)	[180] (45)	[185] (30)	[190] (5)	[195] 155	[0] 225	380
b_j		75	100	250	350	200	225	1200

Diese Ausgangslösung hat folgende Einkaufskosten:

$$K_1 = 75 \cdot 100 + 100 \cdot 120 + 245 \cdot 140 + 5 \cdot 150 + 350 \cdot 180 + 45 \cdot 190 + 155 \cdot 195 + 225 \cdot 0$$

$$\underline{K_1 = 156.325 \text{ GE}}$$

Der negative Opportunitätskostenwert $oc_{14} = -10$ zeigt an, daß diese Ausgangslösung verbesserungsfähig ist. Das Feld $i = 1$, $j = 4$ wird mit der Menge Δ belegt. Entsprechend wird das Feld $i = 1$, $j = 3$ um die Menge Δ vermindert, das Feld $i = 2$, $j = 3$ um die Menge Δ erhöht und das Feld $i = 2$, $j = 4$ um die Menge Δ vermindert,

damit das Gleichungssystem wieder erfüllt ist. Da $x_{13} = 245$ der minimale Wert der im Zyklus zu vermindernden Variablenwerte ist, wird $\Delta = 245$ Stück gesetzt.
Für die Lösung nach der ersten Iteration reduzieren sich die Einkaufskosten auf:

$$K_2 = K_1 + oc_{14} \cdot \Delta = 156.325 - 10 \cdot 245$$

$$\underline{K_2 = 153.875 \text{ GE}}$$

Die neue Lösung nach der ersten Verbesserung lautet:

Tabelle 73: Matrix der Transportmethode nach der ersten Iteration (mit Potentialen und Opportunitätskosten)

Hersteller \ Kleidergröße	u_i \ v_j	34	36	38	40	42	fiktive Nachfrage	a_i
		100	120	130	160	170	−25	
A	0	−Δ [100] 75	[120] 100	[140] 10	+Δ [160] 245	[180] 10	[0] 25	420
B	20	+Δ [115] −5	[140] 0	[150] 250	−Δ [180] 105	[190] 45	[0] 5	400
C	25	[165] 40	[180] 35	[185] 30	[190] 5	[195] 155	[0] 225	380
b_j		75	100	250	350	200	225	1200

Die Einkaufskosten dieser Lösung betragen:

$$K_2 = 75 \cdot 100 + 100 \cdot 120 + 245 \cdot 160 + 250 \cdot 150 + 105 \cdot 180 + 45 \cdot 190 + $$
$$+ 155 \cdot 195 + 225 \cdot 0 = \underline{153.875 \text{ GE}}$$

Auch diese Lösung ist wegen $oc_{21} = -5$ noch nicht optimal. x_{21} wird mit der Menge Δ in die Lösung aufgenommen. x_{11} wird entsprechend um Δ vermindert, x_{14} um Δ vermehrt und schließlich x_{24} um Δ verkleinert. Das Gleichungssystem ist dann wieder erfüllt. Da $x_{11} = 75$ der minimale Wert der im Zyklus zu vermindernden Variablenwerte ist, wird hier Δ mit 75 Stück ermittelt (x_{11} scheidet aus der Lösung aus). Für die Lösung nach der zweiten Iteration reduzieren sich die Einkaufkosten auf:

$$K_3 = K_2 + oc_{21} \cdot \Delta = 153.875 - 5 \cdot 75$$

$$\underline{K_3 = 153.500 \text{ GE}}$$

Die Lösung nach der zweiten Verbesserung lautet:

Tabelle 74: Matrix der Transportmethode nach der zweiten Iteration – Optimallösung

Hersteller \ Kleidergröße	u_i \ v_j	34	36	38	40	42	fiktive Nachfrage	a_i
		95	120	130	160	170	-25	
A	0	[100] (5)	-Δ [120] 100	[140] (10)	+Δ [160] 320	[180] (10)	[0] (25)	420
B	20	[115] 75	+Δ [140] (0)	[150] 250	-Δ [180] 30	[190] 45	[0] (5)	400
C	25	[165] (45)	[180] (35)	[185] (30)	[190] (5)	[195] 155	[0] 225	380
b_j		75	100	250	350	200	225	1.200

Die Einkaufskosten dieser Lösung betragen:

$$K_3 = 100 \cdot 120 + 320 \cdot 160 + 75 \cdot 115 + 250 \cdot 150 + 30 \cdot 180 + $$
$$+ 45 \cdot 190 + 155 \cdot 195 + 225 \cdot 0$$

$$\underline{K_3 = 153.500 \text{ GE}}$$

Da alle Opportunitätskosten (oc-Werte) nichtnegativ sind, handelt es sich um ein kostenminimales Einkaufsprogramm (*Optimallösung*).
Das optimale Einkaufsprogramm lautet (Liefermenge in Stück):

		Kleidergröße 34	36	38	40	42
Hersteller	A		100		320	
	B	75		250	30	45
	C					155

Die Angebotsmenge des Herstellers C von 380 Stück Damenkleidern wird also nur mit 155 Stück in Anspruch genommen. Der oc-Wert in dem freien Feld (L-Feld) der zweiten Zeile und zweiten Spalte ist Null ($oc_{22} = 0$). Dies deutet darauf hin, daß mehrere optimale Lösungen existieren (*Mehrfachlösungen*). x_{22} könnte mit einer Menge Δ ($0 \leqslant \Delta \leqslant 30$) in die Lösung aufgenommen werden. Entsprechend wäre x_{12}

um die Menge Δ zu vermindern, x_{14} um die Menge Δ zu vergrößern und x_{24} um die Menge Δ zu verkleinern (vgl. Markierung in Tabelle 74). Das System der Nebenbedingungsgleichungen wäre dann wieder erfüllt.

2. *Fall 2: Bedarfsmenge größer als Angebotsmenge*

Es liegt auf der Hand, daß in diesem Fall der *Ausgleich* über ein *zusätzliches Angebot* in dem Modell erreicht wird. Es wird eine weitere Angebotszeile in die Matrix der Transportmethode aufgenommen, die die Übernachfrage ausgleicht. Dabei kann es sich um eine reale Vergrößerung des Angebotes (wie etwa Zukauf, Einführung von Überstunden) handeln oder auch nur um ein *fiktives Angebot*. Dem fiktiven Angebot wären als Einheitskosten Nullelemente zuzuordnen. Aus dem optimalen Programm geht dann hervor, für welchen Bedarfsort (oder welche Bedarfsart) der Bedarf nicht oder nicht voll gedeckt wird.

E. Transportprobleme mit zusätzlichen Kapazitätsbeschränkungen

Es kann sein, daß die zu transportierenden (zuzuordnenden) Mengen auf einigen Transportverbindungen (Zuordnungsmöglichkeiten) unterhalb gewisser Schranken bleiben müssen. Wir betrachten zunächst den einfachen Fall, daß *bestimmte Transportverbindungen* (Zuordnungsmöglichkeiten) *nicht benutzt* werden dürfen ($x_{ij} = 0$). Die Behandlung solcher zusätzlicher Kapazitätsbeschränkungen soll erörtert werden an einem *Beispiel* aus dem Bereich der *Maschinenbelegungsplanung:*

Ein Industriebetrieb fertigt vier Produktarten P_j ($j = 1, 2, 3, 4$). Diese vier Produktarten können auf drei Maschinentypen M_i ($i = 1, 2, 3$) sukzessiv hergestellt werden. Der Deckungsbeitrag je Mengeneinheit (ME) ist je nach Typ der benutzten Maschinen verschieden. Die nachstehende Tabelle zeigt die wöchentlich zu deckende Nachfrage und die benötigten Fertigungszeiten je Mengeneinheit und Produktart:

Produktart	Nachfrage je Woche in ME	Erforderliche Maschinenzeit in Stunden je ME
P_1	40	40
P_2	100	15
P_3	80	20
P_4	180	10

Die Maschinen können 50 Stunden je Woche (Planperiode) eingesetzt werden. Vom Maschinentyp M_1 stehen 20 Maschinen, vom Typ M_2 stehen 80 Maschinen und vom Typ M_3 stehen 40 Maschinen zur Verfügung.

Die geplanten Verkaufspreise für die einzelnen Produktarten sind:

P_1	600 DM/ME	P_3	400 DM/ME
P_2	200 DM/ME	P_4	100 DM/ME

Die proportionalen Kosten in Abhängigkeit vom Maschinentyp betragen:

Maschinentyp	Produktart	proportionale Kosten in DM/ME
M_1	P_1	440
	P_2	155
	P_3	360
	P_4	65
M_2	P_1	480
	P_2	170
	P_3	360
	P_4	60
M_3	P_1	500
	P_2	140
	P_3	360
	P_4	80

Gesucht ist das *optimale (deckungsbeitragsmaximale) Maschinenbelegungsprogramm!*

Zunächst wird die in einer Woche nachgefragte Menge an Maschinenstunden ermittelt (Nachfrage je Woche mal erforderliche Maschinenzeit in Stunden je ME):

für P_1: $b_1 = 40 \cdot 40 = 1.600$ Maschinenstunden

P_2: $b_2 = 100 \cdot 15 = 1.500$ Maschinenstunden

P_3: $b_3 = 80 \cdot 20 = 1.600$ Maschinenstunden

P_4: $b_4 = 180 \cdot 10 = 1.800$ Maschinenstunden

Das Angebot an Maschinenstunden je Woche ergibt sich aus 50 Stunden je Woche mal Anzahl an verfügbaren Maschinen:

M_1: $a_1 = 1.000$ Maschinenstunden

M_2: $a_2 = 4.000$ Maschinenstunden

M_3: $a_3 = 2.000$ Maschinenstunden

Die Deckungsbeiträge g_{ij} ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4$) in DM je Maschinenstunde sind: (Preis in DM/ME minus proportionale Kosten in DM/ME) dividiert durch die erforderliche Maschinenzeit in Stunden je ME. Die Deckungsbeiträge sind rechts oben in den Feldern der nachstehenden *Matrix der Transportmethode* eingetragen. Die zulässige Ausgangslösung ist nach VAM ermittelt:

Tabelle 75: Matrix der Transportmethode – zulässige Ausgangslösung nach VAM, die zugleich Optimallösung ist

Produktart / Maschinentyp	u_i \ v_j	P_1	P_2	P_3	P_4	fiktive Nachfrage	a_i
	v_j	4	5	3	5	1	
M_1	0	4 1000	3 2	2 1	3,5 1,5	0 1	1000
M_2	–1	3 600	2 2	–Δ 2 1600	4 1800	+Δ 0 0	4000
M_3	–1	2,5 0,5	4 1500	+Δ 2 B-Feld	2 2	–Δ 0 500	2000
b_j		1600	1500	1600	1800	500	7000

In der vorstehenden zulässigen Ausgangslösung (nach VAM ermittelt) ist das überschüssige Angebot an Maschinenstunden durch eine fiktive Nachfrage von 500 Maschinenstunden ausgeglichen. Da es sich um ein *Maximierungsproblem* handelt, ergeben sich die Opportunitätskosten als die Differenzen $z_{ij} - g_{ij}$ für alle L-Felder ($z_{ij} = u_i + v_j$).

Eine *Maximierungsaufgabe* kann auch dadurch gelöst werden, daß man sie in eine *Minimierungsaufgabe überführt.* Das kann erreicht werden durch die Bildung einer *Komplementärmatrix* mit den Elementen p_{ij} zur Matrix der Deckungsbeiträge mit den Elementen g_{ij}, d.h. durch die Ergänzung der Werte der Deckungsbeiträge auf einen entsprechend hoch gewählten Wert q. Es ist also: $p_{ij} = q - g_{ij}$.
Man hat es dann mit einer Minimierungsaufgabe, d.h. einer dualen Aufgabe zur Maximierungsaufgabe zu tun. Die duale Lösung (des Minimierungsproblems) gibt die deckungsbeitragsmaximale Lösung wieder:

$$G_{max} = \bar{x}_{ij} q - (\bar{x}_{ij} p_{ij})$$

$$G_{max} = \bar{x}_{ij} \cdot g_{ij}$$

Dabei sind mit $\bar{x}_{ij}$ die Verteilungsmengen der Optimallösung bezeichnet (vgl. *Angermann, A.*, 1963, S. 184).

Das hier in Tabelle 75 dargestellte Problem ist *degeneriert.* Zur Behebung der *Degeneration* wurde das Feld i = 3, j = 3 mit einer Null als Basisvariablenwert ($x_{33} = 0$) belegt (gekennzeichnet als B-Feld). Da alle oc-Werte – die links unten in den Feldern der Matrix der Transportmethode angegeben sind – nichtnegativ sind (Transportkriterium), ist bereits eine Optimallösung erreicht. Ein oc-Wert ist Null (oc_{25} = 0). Dies zeigt an, daß alternative Optimallösungen (Mehrfachlösungen) existieren.

x_{25} könnte mit einer Menge Δ ($0 \leq \Delta \leq 500$) in die Lösung aufgenommen werden. Entsprechend wäre x_{35} um Δ zu vermindern, x_{33} um Δ zu vergrößern und schließlich x_{23} um Δ zu verkleinern. Das Gleichungssystem wäre dann wieder erfüllt.
Der maximale Gesamtdeckungsbeitrag der Lösungen beträgt:

$$G = 1.000 \cdot 4 + 600 \cdot 3 + 1.600 \cdot 2 + 1.800 \cdot 4 + 1.500 \cdot 4$$

$$\underline{G = 22.200 \text{ GE}}$$

Das Optimalprogramm lautet:

Tabelle 76: Ergebnisdarstellung

Maschinentyp	Produktart	eingesetzte Maschinenstunden	Mengeneinheiten der Produktarten	proportionale Kosten in DM	geplante Erlöse in DM	geplante Deckungsbeiträge in DM	Anzahl der eingesetzten Maschinen
M_1	P_1	1.000	25	11.000	15.000	4.000	20
M_2	P_1	600	15	7.200	9.000	1.800	12
	P_3	1.600	80	28.800	32.000	3.200	32
	P_4	1.800	180	10.800	18.000	7.200	36
M_3	P_2	1.500	100	14.000	20.000	6.000	30
	„fiktive Nachfrage"	500	–	–	–	–	10 Maschinen Überschußkapazität

Abwandlung des Beispiels: *zusätzliche Kapazitätsbeschränkungen*

Es wird angenommen, daß Produktart P_1 nicht auf Maschinentyp M_2 gefertigt werden kann. Das bedeutet, daß nur solche Programme zulässig sind, bei denen $x_{21} = 0$ ist. Das Problem läßt sich auf einfache Weise lösen, indem wir den Deckungsbeitrag g_{21} verändern, und zwar ersetzen wir den ursprünglichen Wert 3 durch einen sehr kleinen Wert. Da die Transportmethode hier zum Ziele hat, das Programm mit dem maximalen Deckungsbeitrag zu bestimmen, bedeutet dieser Schritt einen „automatischen Anreiz", einen positiven Wert für x_{21} zu vermeiden (*Krekó, B.*, 1970, S. 31 ff.). Der sehr kleine Wert als Deckungsbeitrag, der einfach mit $-M$ bezeichnet wird, braucht numerisch nicht bestimmt zu werden. Wir sehen $-M$ als eine Zahl an,

die so klein ist, daß sie praktisch unverändert bleibt, wenn sie um eine endliche Zahl vergrößert oder verkleinert wird. Wird das bekannte Verfahren angewendet, so erhalten wir:

Tabelle 77: Matrix der Transportmethode – zulässige Ausgangslösung nach VAM mit Kapazitätsbeschränkung $x_{21} = 0$ – zugleich Optimallösung

Maschinentyp \ Produktart	u_i \ v_j	P_1	P_2	P_3	P_4	fiktive Nachfrage	a_i
		4	5,5	5,5	7,5	3,5	
A	0	4 1000	3 2,5	2 3,5	3,5 4,0	0 3,5	1000
B	–3,5	– M M	2 100	2 1600	4 1800	0 500	4000
C	–1,5	2,5 600	4 1400	2 2,0	2 4,0	0 2,0	2000
b_j		1600	1500	1600	1800	500	7000

Die zulässige Ausgangslösung nach VAM hat einen Gesamtdeckungsbeitrag von:

$G = 1.000 \cdot 4 + 100 \cdot 2 + 1.600 \cdot 2 + 1.800 \cdot 4 + 600 \cdot 2{,}5 + 1.400 \cdot 4$

$\underline{G = 21.700 \text{ GE}}$

Da keine negativen Opportunitätskosten vorhanden sind ($oc_{ij} \geqslant 0$), ist die Optimallösung erreicht, so daß der Deckungsbeitrag von 21.700 GE G_{max} ist. Die *zusätzliche Kapazitätsbeschränkung* ($x_{21} = 0$) hat mithin eine Verschlechterung des Ergebnisses um 500 GE bewirkt (vgl. Tabelle 76).

Es kann auch vorkommen, daß mehrere Verbindungen nicht besetzt werden dürfen. In diesem Fall müssen wir bei der Maximierungsaufgabe mehrere g_{ij} durch sehr kleine Werte (–M) und bei der Minimierungsaufgabe mehrere Kostenelemente c_{ij} durch sehr große Werte (M) ersetzen. Die Behandlungsweise entspricht der oben beschriebenen. Es kann dabei passieren, daß ein positives x_{ij} auf irgendein –M bzw. M programmiert wird. Dies würde dann bedeuten, daß die betreffende Einschränkung nicht erfüllt werden kann, die Aufgabe keine Lösung hat.

Schwieriger ist die Behandlung von *Kapazitätsbeschränkungen* mit „$\leqslant$" *oder* „$\geqslant$" *-Bedingungen.*

Nehmen wir in der obigen Aufgabenstellung (Tabelle 75) an, daß aus irgendwelchen Gründen für Produktart P_1 *höchstens* 400 Maschinenstunden des Maschinentyps M_2 eingesetzt werden dürfen, so lautet die *Kapazitätsbeschränkung:*

$$x_{21} \leqslant 400$$

Diese Aufgabe kann nicht mehr durch eine Veränderung des Deckungsbeitrages g_{21} gelöst werden.
Das zulässige Ausgangsprogramm konstruieren wir nach einem der besprochenen Verfahren, z.B. nach VAM. Doch sind dabei gewisse Abweichungen notwendig. Als erstes beginnen wir bei dem Element x_{21}, dem die *gegebene obere Schranke zugeordnet* wird, d.h. $x_{21} = 400$.

Dadurch ist dieses Element *gesättigt.* Dann modifiziert man die Aufgabe mit dieser Menge an Maschinenstunden, d.h. man setzt $a_2 = 4.000 - 400 = 3.600$ und $b_1 = 1.600 - 400 = 1.200$ und führt die weiteren Rechnungen durch. Der Deckungsbeitrag g_{21} wird dabei mit einem sehr kleinen Wert (–M) belegt, damit nicht weitere Maschinenstunden auf das Mengenelement x_{21} programmiert werden:

Tabelle 78: Matrix der Transportmethode – zulässige Ausgangslösung nach VAM mit Kapazitätsbeschränkung $x_{21} \leqslant 400$ – zugleich Optimallösung

Maschinentyp \ Produktart	u_i \ v_j	P_1	P_2	P_3	P_4	fiktive Nachfrage	a_i
		4	5,5	3,5	5,5	1,5	
A	0	[4] 1000	[3] (2,5)	[2] (1,5)	[3,5] (2,0)	[0] (1,5)	1000
B	−1,5	[−M] (M)	[2] (2,0)	[2] 1600	[4] 1800	[0] 200	3600
C	−1,5	[2,5] 200	[4] 1500	[2] (0)	[2] (2,0)	[0] 300	2000
b_j		1200	1500	1600	1800	500	6600

In dieser Lösung ist der Deckungsbeitrag g_{21} gleich –M gesetzt. Damit ist sichergestellt, daß keine weiteren Maschinenstunden (x_{21} ist bereits mit 400 Maschinenstunden gesättigt) x_{21} zugeordnet werden. Da alle Opportunitätkosten nichtnegativ sind, ist die gefundene Lösung für x_{21} = *400 optimal* (wegen $oc_{33} = 0$ existieren mehrere optimale Lösungen). Der maximale Gesamtdeckungsbeitrag beträgt:
$G = 1000 \cdot 4 + 1600 \cdot 2 + 1800 \cdot 4 + 200 \cdot 2{,}5 + 1500 \cdot 4 + 400 \cdot 3$ (das bereits vorweg belegte Element x_{21} mal g_{21})
$\underline{G = 22.100 \text{ GE}}$

Es wäre nun zu prüfen, ob x_{21} die obere Schranke mit 400 Maschinenstunden oder aber weniger anzunehmen hat. Es handelt sich um eine *postoptimale Betrachtung* des Problems, so daß sich aus Tabelle 75 plausibel ableiten läßt, daß $x_{21} = 400$ zu sein hat, da die Optimallösung *ohne zusätzliche Kapazitätsbeschränkung* x_{21} mit 600 Maschinenstunden aufweist.

IX. Zuordnungsproblem

A. Grundlegung

Das *Zuordnungsproblem* (Assignment Problem, *Ernennungsproblem*) ist ein Sonderfall des Transportproblems. Es unterscheidet sich vom Transportproblem dadurch, daß alle Angebots- und Bedarfsmengen gleich Eins sind und die Zahl der Anbieter gleich der Zahl der Nachfrager ist (quadratische Matrix). Bei dem Zuordnungsproblem handelt es sich um die *optimale Zuordnung von n Einsatzgrößen auf n Aufgaben* (z.B. Zuordnung von Personen zu Tätigkeiten, Maschinen zu Aufträgen, Flugzeugen zu Fluglinien, Reisenden zu Verkaufsbezirken, Personen zu Abteilungen, Fahrzeugen zu Garagen, Personen zu Personen).
Die Variablen x_{ij} können also nur die Werte Null oder Eins annehmen:
$x_{ij} = 1$ heißt: Zuordnung der i-ten Einsatzgröße zur j-ten Aufgabe;
$x_{ij} = 0$ heißt: keine Zuordnung.
Mit den Symbolen des Transportproblems ergibt sich folgender mathematischer Modellansatz:

Zielfunktion:

$$\text{Minimiere bzw. maximiere K bzw. G} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (\text{für } j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (\text{für } i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ oder } 1 \qquad (\text{für } i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

Je nachdem, ob es sich um eine Minimierungs- oder Maximierungsaufgabe handelt, bedeuten die Bewertungsfaktoren c_{ij} Kosten oder Deckungsbeiträge je Mengeneinheit.
Die Anwendung des sog. Transportalgorithmus auf das Zuordnungsproblem bereitet Schwierigkeiten. Da beim Zuordnungsproblem nur n Zuordnungen (n B-Felder) erlaubt sind, gegenüber 2n – 1 erforderlichen bei der Transportmethode, liegt mehrfache Degeneration vor.
Zur Lösung des Zuordnungsproblems sind spezielle Lösungsansätze entwickelt worden.

B. Ungarische Methode

Die *Ungarische Methode* – auch *FLOOD'sche Zurechnungstechnik* genannt (*Churchman, C. W.* u.a., 1971, S. 319) –, die an einem Zahlenbeispiel erläutert werden soll, benutzt zur Bestimmung der Zuordnung mit minimalen Kosten lediglich die Matrix der Kostenkoeffizienten c_{ij} (Bewertungsmatrix).
Die Ungarische Methode geht in ihrem Rechenverfahren auf H. KUHN zurück und beruht auf einem Satz, der von den ungarischen Mathematikern D. KÖNIG und E. EGERVÁRY formuliert wurde. Der Satz besagt: „Für jede beliebige quadratische Matrix, deren Elemente teils Null, teils von Null verschiedene positive Zahlen sind, ist die minimale Anzahl der Decklinien gleich der maximalen Anzahl der unabhängigen Punkte" (*Jándy, G.*, 1967, S. 74).

1. Beispiel: Schaufensterzuteilung

Ein Warenhaus sei nach Warengruppen in sieben Verkaufsabteilungen $V_1, V_2, \ldots, V_7$ gegliedert. Im Sinne der „pretialen Lenkung" (E. SCHMALENBACH) erfolgt für die Verkaufsabteilungen eine Ergebnisrechnung mit Erfolgsbeteiligung der jeweiligen Belegschaftsmitglieder. Dem Warenhaus stehen nur fünf Schaufensteranlagen $S_1, S_2, \ldots, S_5$ zur Verfügung, die in ihrer Werbewirkung, bedingt durch Lage, Größe etc., unterschiedlich eingeschätzt werden und sich für die Ausstellung der Waren der einzelnen Verkaufsabteilungen verschieden gut eignen. Den einzelnen Verkaufsabteilungen wurden die verfügbaren Schaufensteranlagen bisher von der Unternehmensleitung zugewiesen. Dies hatte zu Problemen zwischen den einzelnen Verkaufsabteilungen und der Unternehmensleitung geführt. Die Unternehmensleitung will nun die Schaufensteranlagen den Verkaufsabteilungen „vermieten", d.h. die Verkaufsabteilungen sollen künftig eine kalkulatorische Miete für die Überlassung der Schaufensteranlagen angelastet bekommen (mit einer entsprechenden Wirkung auf das Abteilungsergebnis). Die Höhe der zu verrechnenden kalkulatorischen Miete wird jedoch nicht durch die Unternehmensleitung autoritär festgesetzt, sondern soll das Ergebnis von Angebot und Nachfrage sein. Dazu werden die Verkaufsabteilungen aufgefordert, entsprechende Angebote über die Schaufensteranlagen abzugeben. Für die Zuteilung der Schaufensteranlagen ist jedoch absprachegemäß

Bedingung, daß jeder Abteilung nur eine Schaufensteranlage zugewiesen werden kann. Die für den Monat Z bei der Unternehmensleitung eingegangenen Angebote der Abteilungen ergeben sich aus nachstehender Preismatrix (in GE):

Tabelle 79: Angebotspreise g_{ij} der Verkaufsabteilungen i für die einzelnen Schaufensteranlagen j

		Schaufensteranlagen						
		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	„S_6"	„S_7"
Verkaufs-abtei-lungen	V_1	180	200	160	135	225	0	0
	V_2	170	180	165	150	230	0	0
	V_3	200	185	150	165	195	0	0
	V_4	190	200	140	135	190	0	0
	V_5	220	210	130	175	200	0	0
	V_6	195	215	145	180	175	0	0
	V_7	205	175	155	160	195	0	0

Da sich alle sieben Verkaufsabteilungen um die fünf Schaufensteranlagen bewerben, fügen wir zwei Spalten mit *fiktiven* Schaufensteranlagen „S_6" und „S_7" hinzu (damit ist die Zahl der Anbeiter gleich der Zahl der Nachfrager). Da die Felder dieser fiktiven Spalten nicht für die Lösung in Frage kommen, sind Nullen als Angebotspreise g_{ij} eingetragen. Es ist die Zuweisung gesucht, die die insgesamt zu verrechnende kalkulatorische Miete *maximiert* (vgl. auch *Angermann, A.*, 1963, S. 159 f.).

2. Rechentechnik

Da die *Ungarische Methode* das Minimierungsproblem zum Gegenstand hat, bilden wir zur gestellten Aufgabe das Dual und lösen damit eine Minimierungsaufgabe. Das erreicht man leicht durch Bildung einer *Komplementärmatrix* zur Matrix der Angebotspreise. Die Komplementärmatrix mit den Elementen p_{ij} ist definiert als Differenz zwischen der Matrix *Q* und der Matrix der Angebotspreise mit den Elementen g_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, 7)$.
Die Matrix *Q* weist für alle Elemente den gleichen Wert q auf. Für q ist eine genügend große Zahl zu wählen, die größer oder gleich dem größten Angebotspreis g_{ij} ist, damit keine negativen Elemente in der Komplementärmatrix entstehen. In unserem Beispiel wählen wir q = 300. Die Komplementärmatrix hat dann folgende Elemente: $p_{ij} = 300 - g_{ij}$.

Tabelle 80: Bewertungsmatrix (Komplementärmatrix mit den Elementen $p_{ij} = 300 - g_{ij}$) – mit Zeilenminima

		Schaufensteranlagen							
		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	„S_6"	„S_7"	Zeilen-minima
Verkaufs-abteilungen	V_1	120	100	140	165	75	300	300	75
	V_2	130	120	135	150	70	300	300	70
	V_3	100	115	150	135	105	300	300	100
	V_4	110	100	160	165	110	300	300	100
	V_5	80	90	170	125	100	300	300	80
	V_6	105	85	155	120	125	300	300	85
	V_7	95	125	145	140	105	300	300	95

Die Summe der Komplementärelemente p_{ij} ist zu minimieren:

Minimiere: $K = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$ (im Beispiel ist n = 7)

Die Optimallösung wird iterativ erarbeitet. Es läßt sich zeigen, daß ein Zuordnungsproblem in ein äquivalentes Problem überführt wird, wenn eine Zeile oder eine Spalte der Bewertungsmatrix um eine Zahl additiv verändert wird. D.h., Probleme, die sich nur dadurch unterscheiden, daß die Elemente in irgendeiner Zeile oder Spalte der Bewertungsmatrix um die gleiche Größe vermehrt oder vermindert sind, besitzen das gleiche opitmale Programm (*Krekó, B.*, 1970, S. 16 ff. und 378). Daraus resultiert als erstes die ***Reduktion der Bewertungsmatrix***. Der Grundgedanke der Reduktion einer Bewertungsmatrix (Kosten- oder Deckungsbeitragsmatrix) beruht also auf der Tatsache, daß nur die Differenzen der gegebenen Bewertungselemente (p_{ij} oder c_{ij}) für die Optimierung eine entscheidende Rolle spielen.

Dazu ein einfaches *Demonstrationsbeispiel* (Transportproblem):
Zwei Anbieter bieten je eine ME eines homogenen Gutes an. Zwei Nachfrager benötigen von diesem Gut je eine ME. Die Kostenmatrix sei (in Geldeinheiten/ME):

i \ j	1	2
1	7	5
2	6	8

Ex existieren zwei mögliche Programme:

Lösung 1: $x_{11} = 1$; $x_{12} = 0$

$x_{21} = 0$ $x_{22} = 1$

mit $K_1 = 7 + 8 = 15$ GE (Geldeinheiten)

Lösung 2: $x_{11} = 0$; $x_{12} = 1$

$x_{21} = 1$; $x_{22} = 0$

mit $K_2 = 5 + 6 = 11$ GE

Unter der Zielsetzung Kostenminimierung ist Lösung 2 um 4 GE günstiger als Lösung 1:

$$K_1 - K_2 = 15 - 11 = 4 \text{ GE}$$

Vermindert man z.B. alle Kostenelemente der ersten Spalte um 3, so entsteht die reduzierte Kostenmatrix:

i \ j	1	2
1	4	5
2	3	8

mit $K_1 = 4 + 8 = 12$ GE und $K_2 = 3 + 5 = 8$ GE.
Auch in diesem Fall ist K_2 günstiger als K_1 mit der gleichen Differenz:

$$K_1 - K_2 = 12 - 8 = 4 \text{ GE}$$

Auf Grund dieses Sachverhaltes kann eine Bewertungsmatrix so umgeformt (reduziert) werden, daß sowohl in allen Spalten als auch in allen Zeilen die Null als das kleinste Element erscheint. Die einzelnen Rechenschritte der Ungarischen Methode zielen darauf ab, die Bewertungsmatrix auf eine Matrix zu reduzieren, in der *n unabhängige Nullelemente* auftreten. In Anlehnung an *B. Krekó* (1970, S. 379) werden Nullen der reduzierten Matrix dann ***unabhängig*** genannt, wenn sie keine Zeile und Spalte gemeinsam haben. Dieses nicht immer eindeutige Schema der n unabhängigen Nullelemente ergibt die *Optimallösung des Zuordnungsproblems.*
Die Umformung der Bewertungsmatrix wird zunächst in zwei Schritten durchgeführt:
(1) In jeder Zeile wird das minimale Element ausgewählt (in Tabelle 80 bereits angegeben) und von allen Elementen der betreffenden Zeile subtrahiert. Die Reihenfolge der Subtraktion ist beliebig:

Tabelle 81: Reduzierte Bewertungsmatrix mit Spaltenminima

i \ j	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	„S_6"	„S_7"
V_1	45	25	65	90	0	225	225
V_2	60	50	65	80	0	230	230
V_3	0	15	50	35	5	200	200
V_4	10	0	60	65	10	200	200
V_5	0	10	90	45	20	220	220
V_6	20	0	70	35	40	215	215
V_7	0	30	50	45	10	205	205
Spalten-minima	0	0	50	35	0	200	200

(2) In jeder Spalte der neuen reduzierten Matrix wird das minimale Element ausgewählt (in Tabelle 81 bereits angegeben) und von allen Elementen der betreffenden Spalte subtrahiert.

Tabelle 82: Reduzierte Bewertungsmatrix mit Decklinien

i \ j	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	„S_6“	„S_7“
V_1	45	25	15	55	0	25	25
V_2	60	50	15	45	0	30	30
V_3	0	15	0	0	5	0	0
V_4	10	0	10	30	10	0	0
V_5	0	10	40	10	20	20	20
V_6	20	0	20	0	40	15	15
V_7	0	30	0	10	10	(5)	(5)

Wie man ohne weiteres erkennt, genügt Tabelle 82 noch nicht den Lösungsbedingungen (7 unabhängige Nullelemente). Da sich diese Feststellung bei großen Matrizen u.U. als schwierig erweist, kann man sich eines einfachen Hilfsmittels bedienen: Man überzieht die reduzierte Matrix zeilen- und spaltenweise mit *Decklinien*, so daß alle Nullen durch mindestens eine Decklinie überdeckt werden. Es wird die minimale Zahl der Decklinien ermittelt, die alle Nullen abdeckt.

Ist $d = n$, so ist die Zahl der Decklinien gleich der Zahl der Zeilen bzw. Spalten, d.h. es liegen genügend unabhängige Nullelemente für die n Zuordnungen vor (Bedingung für Optimallösung).

In der reduzierten Matrix der Tabelle ist die Zahl der Decklinien kleiner als die Zahl der Zuordnungen ($d = 6 < n = 7$). Die reduzierte Matrix weist also – wie oben bereits festgestellt – noch nicht n unabhängige Nullelemente auf. Ein weiterer 3. Rechenschritt ist erforderlich (weitere Umformung der Bewertungsmatrix).

(3) Man sucht das kleinste Element der Matrix (Tabelle 82) auf, welches nicht von einer Decklinie abgedeckt ist, subtrahiert es von allen nicht mit Decklinien abgedeckten Elementen und addiert es zu den Elementen, die im Schnittpunkt von zwei Decklinien liegen (*Churchman, C. W.*, u.a., 1971, S. 314 ff.; *Krekó, B.*, 1970, S. 382 ff.).

Das kleinste – nicht überdeckte – Element der reduzierten Matrix (Tabelle 82) ist in Feld V_7/„S_6“ bzw. V_7/„S_7“ mit 5 GE (vgl. kreisförmige Markierung). Die neue Matrix nach der dritten Umformung lautet:

Tabelle 83: Reduzierte Bewertungsmatrix nach 3. Umformung mit Decklinien

i \ j	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	„S_6"	„S_7"
V_1	45	20	15	50	0	20	20
V_2	60	45	15	40	0	25	25
V_3	5	15	5	0	10	0	0
V_4	15	0	15	30	15	0	0
V_5	0	(5)	40	(5)	20	15	15
V_6	25	0	25	0	45	15	15
V_7	0	25	0	5	10	0	0

Da d = 6 < n = 7 weist die vorstehende reduzierte Matrix noch nicht n unabhängige Nullelemente auf. Der Rechenschritt 3 wird wiederholt, bis n unabhängige Nullelemente vorliegen.

Das kleinste – nicht überdeckte – Element der reduzierten Bewertungsmatrix (Tabelle 83) ist in Feld V_5/S_2 bzw. V_5/S_4 mit 5 GE (vgl. kreisförmige Markierung). Nach der vierten Umformung ergibt sich folgende Matrix:

Tabelle 84: Reduzierte Bewertungsmatrix nach 4. Umformung mit Decklinien

i \ j	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	„S_6"	„S_7"
V_1	45	15	(10)	45	0	15	15
V_2	60	40	(10)	35	0	20	20
V_3	10	15	5	0	15	0	0
V_4	20	0	15	30	20	0	0
V_5	0	0	35	0	20	10	10
V_6	30	0	25	0	50	15	15
V_7	5	25	0	5	15	0	0

Da d = 6 < n = 7 ist Schritt 3 nochmals zu wiederholen. Das kleinste – nicht überdeckte – Element der reduzierten Bewertungsmatrix (Tabelle 84) ist 10 GE in Feld V_1/S_3 bzw. V_2/S_3 (vgl. kreisförmige Markierung). Nach der fünften Umformung ergibt sich folgende Matrix:

Tabelle 85: Reduzierte Bewertungsmatrix nach 5. Umformung mit Decklinien

i \ j	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	„S_6"	„S_7"
V_1	35	5	0	35	(0)	5	5
V_2	50	30	(0)	25	0	10	10
V_3	10	15	5	0	25	0	(0)
V_4	20	(0)	15	30	30	0	0
V_5	(0)	0	35	0	30	10	10
V_6	30	0	25	(0)	60	15	15
V_7	5	25	0	5	25	(0)	0

Da die Zahl der Deckungslinien der Zahl der Zuordnungen entspricht (d = n = 7), ist das Rechenverfahren beendet. Die *Optimallösung* ist gefunden. Es liegen mithin genügend unabhängige Nullemente vor. Sie sind zu bestimmen. Dazu werden zunächst die Nullelemente in der Matrix markiert, die allein in ihrer Zeile oder Spalte stehen (vgl. (0) in Tabelle 85). Im Beispiel ist dies nur das Nullelement im Feld V_5/S_1. Die übrigen Nullen in der Zeile oder Spalte der markierten Nullelemente werden gestrichen. Die nächsten Nullelemente werden markiert und so fort. Bilden vier Nullelemente ein Viereck in der Matrix (wie im Beispiel; vgl. Tabelle 85), so kann eine beliebige ausgewählt werden (Lösungsmannigfaltigkeit, Mehrfachlösung). Die in Tabelle 85 markierten Nullemente ergeben folgende optimale Zuordnung:

Schaufenster-anlagen	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	– fiktiv – „S_6"	„S_7"	
Verkaufsab-teilungen	V_5	V_4	V_2	V_6	V_1	V_7	V_3	
Angebotssumme in GE (vgl. Tabelle 79)	220	200	165	180	225	0	0	$\Sigma = 990$

Optimalzuordnung: 1. Alternative

Wegen der Lösungsmannigfaltigkeit existieren z.B. weitere optimale Zuordnungen:

Schaufenster-anlagen	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	– fiktiv – „S_6"	„S_7"	
Verkaufsab-teilungen	V_5	V_4	V_1	V_6	V_2	V_3	V_7	
Angebots-summe in GE	220	200	160	180	230	0	0	$\Sigma = 990$

Optimalzuordnung: 2. Alternative

Schaufenster-anlagen	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	– fiktiv – „S_6"	„S_7"	
Verkaufsab-teilungen	V_5	V_6	V_1	V_3	V_2	V_4	V_7	
Angebots-summe in GE	220	215	160	165	230	0	0	$\Sigma = 990$

Optimalzuordnung: 3. Alternative

Schaufenster-anlagen	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	– fiktiv – „S_6"	„S_7"	
Verkaufsab-teilungen	V_5	V_6	V_2	V_3	V_1	V_4	V_7	
Angebots-summe in GE	220	215	165	165	225	0	0	$\Sigma = 990$

Optimalzuordnung: 4. Alternative

Andere Methoden zur Lösung des Zuordnungsproblems sind insbesondere die auf *FORD* und *FULKERSON* zurückgehende *Netzwerk-Methode (Ford, L. R.* jr., *Fulkerson, D. R.,* 1956, S. 24 ff.; *Angermann, A.,* 1963, S. 159 ff.) und die von *LITTLE* u.a. zur Lösung des Problems des Handlungsreisenden entwickelte Methode *Branch-and-Bound (Little, J.* u.a., 1963, S. 972 ff.; *Bloech, J.,* 1974, S. 163 ff.; *Runzheimer, B.,* 1978).

X. Beurteilung und Anwendungsmöglichkeiten der linearen Planungsrechnung

Bei betriebswirtschaftlichen Entscheidungen kommt es im allgemeinen darauf an, aus einer Reihe von Alternativen die beste auszusuchen. Unter einer *„besten" Alternative* ist die zu verstehen, für die eine Zielgröße (z.B. Gewinn, Kosten) ihren *größ-*

ten bzw. *kleinsten* Wert annimmt. Die beschränkte Verfügbarkeit der Hilfsmittel spiegelt sich in den *Restriktionen* des Modells wieder (*Gleichungs- oder Ungleichungssystem*). Sind die Variablen in der Zielgröße und in den Restriktionen *linear*, so handelt es sich um *lineare Planungsrechnung*, ein lineares Modell. Damit ist das erste entscheidende Kriterium für die Anwendbarkeit der linearen Planungsrechnung auf betriebswirtschaftliche Entscheidungsprobleme angesprochen, nämlich *der Grad der Entsprechung (Isomorphie) von linear-mathematischem Modell und Realproblem* (Wirklichkeit). Das lineare Optimierungsmodell verlangt *quantitative Fakten* und *lineare Strukturen.*

In welchen Problemen können Betriebswirte ausreichend quantitative Daten und lineare Strukturen vorfinden? Abgesehen davon, daß man im allgemeinen „in der Praxis sowieso zufrieden ist, wenn man nur eine Verbesserung der herrschenden Verhältnisse erzielen, d.h. sich irgendwie in Richtung eines Optimums bewegen kann" (*Stahlknecht, P.*, 1970, S. 79), müssen kausale Gesetzmäßigkeiten vorherrschend sein, um quantitative Beziehungen zwischen den Entscheidungsvariablen – z.B. auf Grund von technischen Verbrauchsfunktionen, oder Verhaltensmustern – ausreichend genau ermitteln zu können. Je mehr aber das gestaltende und schöpferische Element des dispositiven Faktors wirksam und bestimmend wird, desto schwieriger wird es sein, realistische lineare Modelle zu konstruieren. Die Probleme des unteren und mittleren Managements lassen sich noch weitgehend durch Linear-Modelle approximieren. Top-Management-Aufgaben entziehen sich weitgehend einer solchen Modellanalyse, da der Abstraktionsgrad der Modelle zu groß wird. „Alles spricht dafür, daß sich der eigentliche Anwendungsbereich der Verfahrensforschung (und damit auch der linearen Planungsrechnung – d.V.) im wesentlichen auf Einzeldispositionen in den Werkstätten, der Verkaufs- und Beschaffungsabteilungen beschränken wird, also auf Entscheidungen der unteren und mittleren Ebene, wo weniger weitreichende, weniger mit Unsicherheit behaftete und regelmäßig auch weniger komplexe Dispositionen zu treffen sind" (*Moxter, A.*, 1963, S. 200). Je größer also bei Entscheidungsproblemen der Anteil des schöpferischen Elementes ist, je mehr Interdependenzen zu anderen Bereichen bedeutsam werden, desto problematischer und weniger erfolgversprechend wird die Anwendung der linearen Planungsrechung sein müssen. Die in der Literatur beschriebenen wichtigsten Anwendungsfälle zeigen diesen Tatbestand:

(1) Produktionsprobleme

Für die kurzfristige Planung des Produktionsprogramms, basierend auf konstanten Preisen, proportionalen Stückkosten, konstanten Produktionskoeffizienten, führt die lineare Optimierung zu brauchbaren Ergebnissen (*Bichler, K.*, 1970; *Kilger, W.*, 1973, S. 95ff.; *Kilger, W.*, 1977, S. 688 ff.; *Blumenthal, B.*, 1968, S. 83 ff.; *Vokuhl, P.*, 1965, S. 86 ff.; *Münstermann, H.*, 1969, S. 236 ff.; *Birman, I. J.*, 1971, S. 448 ff.; *Fischer, H., Kluge, M.*, 1968, S. 87 ff.; *Dinkelbach, W.*, 1964; *Stahlknecht, P.*, 1970, S. 78 ff.; *Bussmann, K. F., Mertens, P.*, 1968, I; *Gutenberg, E.*, 1966, S. 211 ff.; *Bloech, J.*, 1974, S. 17 ff.; *Gaede, K.-W., Heinhold, J.*, 1976; *Zimmermann, W.*, 1977, S. 24 ff.; *Bol, G.*, 1980, S. 1 ff.; *Schmitz, P., Schönlein, A.*, 1978, S. 6 ff.; *Hilke, W.*, 1978; *Adam, D.*, 1980, S. 136 ff.; *Inderfurth, K.*, 1982, S. 15 ff.).

Die Planungen brauchen sich dabei nicht auf den Produktionsbereich zu beschränken. Die Einbeziehung des Absatz- und Beschaffungsmarktes ist leicht möglich. Einen guten Überblick über solche *simultane Modellansätze* gibt *W. Kilger* (1973). Eine besonders günstige Situation für die Anwendung besteht bei Erdölraffinerien (*Garvin, W. W.* u.a., 1957, S. 407 ff.; *Köhler, R.*, 1967, S. 306 ff.). Die Betriebsabläufe lassen sich hier relativ gut durch ein mathematisches Modell abbilden.

(2) Investitions- und Finanzprobleme

In einem umfangreichen Ansatz kann die Investitions- und Finanzplanung und u. U. auch gleichzeitig die Produktionsplanung unter bestimmten Voraussetzungen durch lineare Optimierung erfolgen (*Albach, H.*, 1960 und 1962; *Jacob, H.*, 1964, S. 487 ff. und S. 551 ff. sowie 1977, S. 60 ff.; *Blohm, H., Lüder, K.*, 1978, S. 230 ff.; *Seelbach, H.*, 1967; *Hax, H.*, 1970; *Schneider, D.*, 1980; *Domsch, M.*, 1970; *Münstermann, H.*, 1969, S. 256 ff.; *Gas, B.*, 1972, S. 126 ff.; *Swoboda, P.*, 1970, S. 143 ff.; *Jaensch, G.*, 1969, S. 48 ff.; *Bloech, J.*, 1974, S. 11 f.; *Hanssmann, F.*, 1971, S. 58 ff.; *Kruschwitz, L.*, 1978, S. 137 ff.; *ter Horst, K. W.*, 1980, S. 184 ff.; *Perridon, L., Steiner, M.*, 1980, S. 107 ff.; *Inderfurth, K.*, 1982, S. 15 ff.).

(3) Mischungsprobleme

Geht aus der Mischung verschiedener Einsatzfaktoren die Leistung (ein Produkt oder Kuppelprodukte) hervor und haben die Einsatzfaktoren unterschiedliche Beschaffungspreise, so wird die optimale Mischung (kostenminimale Mischung) gesucht (*Sasieni, M.* u.a., 1969, S. 242 ff.; *Weber, H. H.*, 1972, S. 57 ff.; *Ackoff, R. L., Sasieni, M. W.*, 1970, S. 180 ff.; *Niemeyer, G.*, 1968, S. 40; *Stahlknecht, P.*, 1970, S. 80 ff.; *Stigler, G. L.*, 1945, S. 303 ff.; *Müller-Merbach, H.*, 1973, S. 165 ff.; *Churchman, C. W.* u. a., 1971, S. 351 ff.; *Vokuhl, P.*, 1965, S. 112 ff.; *Bol, G.*, 1980, S. 8 ff.). Gibt es viele Einsatzfaktoren, die in einer Reihe von Faktormischungen zu der gewünschten Leistung führen, so kann ein solches Optimierungsproblem nur mit der Anwendung systematischer Methoden (wie z. B. linearer Planungsrechnung) gelöst werden. Am bekanntesten sind die Probleme der Öl-, Chemie-, Futtermittel- und Ernährungsindustrie.

(4) Zuordnungsprobleme

Bei den Zuordnungsproblemen geht es um die optimale Zuordnung der Elemente zweier Mengen (z.B. Personen und Aufgabenbereiche, Schaufenster und Verkaufsabteilungen, Aufträge und Maschinen). Mit Hilfe der linearen Planungsrechnung sucht man aus den vielfältigen Zuordnungsmöglichkeiten diejenige aus, die der betrieblichen Zielsetzung entspricht (*Churchman, C. W.* u.a., 1971, S. 314 ff.; *Bloech, J.*, 1974, S. 157 ff.; *Blumenthal, B.*, 1968, S. 125 ff.; *Krekó, B.*, 1970, S. 377 ff.; *Kern, W.*, 1967, S. 66 ff.; *Schettler, K.*, 1971, S. 52 ff.; *Zimmermann, W.*, 1977, S. 50 ff. und S. 72 ff.; *Nieswandt, A.*, 1977, S. 77 ff.; *Schmitz, P., Schönlein, A.*, 1978, S. 210 ff.).

(5) Transportprobleme

Den wesentlichen Inhalt des sog. Transportproblems haben wir im Zusammenhang mit der Behandlung der Transportmethode wiedergegeben. Für die erfolgreiche

Anwendung der linearen Planungsrechnung auf Transportprobleme in der Praxis sind einige Beispiele bekanntgeworden (*Catchpole, A. R.*, 1962, S. 161 ff.; *Gamer, B.*, 1961, S. 363 f.; *Gülicher, H.*, 1959, S. 54 ff.; *Knödel, W.*, 1958, S. 71 ff.; *Vokuhl, P.*, 1965, S. 126 ff.; *Schmitz, P., Schönlein, A.*, 1978, S. 136 ff.).

(6) Standortprobleme
Was mit Hilfe der linearen Planungsrechnung im Hinblick auf eine optimale Standortwahl getan werden kann, ist zunächst die Behandlung eines Teilproblems, nämlich: Ermittlung des transportkostenminimalen Standorts (*Stahlknecht, P.*, 1970, S. 127 ff.; *Vokuhl, P.*, 1965, S. 137 ff.; *Lüder, K.*, 1972, S. 45 ff.; *Steinmann, H., Meyer, M.*, 1963, S. 59 ff.; *Hanssmann, F.*, 1971, S. 33 ff., 49 ff.; *Hanssmann, K.-W.*, 1974).

(7) Mediaselektionsprobleme
Das Entscheidungsproblem besteht hier in der Frage der optimalen Kombination von Werbeträgern. Es existieren eine Reihe von Ansätzen, die optimale Auswahl der Medien mit Hilfe der mathematischen (und damit auch der linearen) Planungsrechnung zu ermitteln (*Miller, D. W., Starr, M. K.*, 1969; *Tietz, B.*, 1969, S. 764 ff.; *Day, R. L.*, 1962, S. 40 ff.; *Harder, T.*, 1966, S. 12 ff.; *Schweiger, G.*, 1975, S. 205 ff.; *Salzinger, M.*, 1968, S. 52 ff.; *Meffert, H.*, 1971, S. 35 ff.; *Kotler, P.*, 1971, S. 449 ff.; *Korndörfer, W.*, 1966, S. 199 ff.; *Vokuhl, P.*, 1965, S. 148 ff.). In diesen Modellen ist auch versucht worden, „Überschneidungen" und „Kumulationen" durch Einführung von Restriktionen zu berücksichtigen (*Buzzel, R., D.*, 1964, S. 77 ff.). Ebenso wurden nichtlineare Wirkungskurven dadurch berücksichtigt, daß diese in lineare Abschnitte zerlegt wurden (*Brown, D. B., Warshaw, M. R.*, 1965, S. 83 ff.; *Montgomery, D. B., Urban, G. L.*, 1970, S. 145; zur *Linearisierung* nichtlinearer Beziehungen s. *Henn, R., Künzi, H. P.*, 1968, S. 32 ff.). Auch gibt es Ansätze zur Berücksichtigung des Timings (*Stasch, S. F.*, 1965, S. 40 ff.; *Charnes, A.* u.a., 1970, S. 190 ff.). Schließlich sei noch erwähnt, daß wegen der Mediarabatte die lineare Planungsrechnung nicht zu optimalen Streuplänen führt (*Kaplan, R. S., Shocker, A. D.*, 1971, S. 37 ff.).

(8) Sonstige Planungsprobleme
Weiterhin sind von den Planungsproblemen, die durch lineare Planungsrechnung (approximativ) gelöst werden können, zu nennen (*Vokuhl, P.*, 1965, S. 122 ff.; *Bloech, J.*, 1974, S. 15 f.):

Verschnittprobleme,
Reihenfolge- und Rundreiseprobleme,
Zeitplanungsprobleme,
Flußprobleme in Netzen,
Lagerhaltungsprobleme.

Ob die Formulierung eines linearen Programmansatzes möglich ist und damit dessen Lösung, ist eine reine Tatbestandsfrage. Die Tatsache, daß die lineare Planungsrechnung in der Praxis (neben der Netzplantechnik) am meisten angewendet wird, liegt daran, daß einerseits für viele praktische Aufgabenstellungen ein linearer Ansatz – zumindest im Rahmen der Genauigkeit der zur Verfügung stehenden Daten – ge-

rechtfertigt ist und andererseits die Lösung auch sehr großer Optimierungsprobleme mit Hunderten oder Tausenden von Variablen und Nebenbedingungen auf leistungsfähigen Computern möglich ist (*Neumann, K.*, 1975, I, S. 18).
Genügt jedoch ein möglicher linearer Planungsansatz einem konkreten Problem ausreichend, so wäre noch die *Wirtschaftlichkeit der Anwendung der linearen Planungsrechnung* zu prüfen. Die Frage der Wirtschaftlichkeit in diesem Zusammenhang beinhaltet einen Vergleich der entstehenden Aufwendungen mit den entstehenden möglichen Erträgen, die sich z.B. in einer Kostensenkung oder Ausbringungssteigerung niederschlagen können. Die Abschätzung eines möglichen Ertrages ist ex ante sehr schwierig. Die Angaben in der Literatur beschränken sich auf Einzelfälle oder aber sie sind sehr global (*Vokuhl, P.*, 1965, S. 88 ff., 158 ff.; *Zimmermann, H.-J.*, 1963, S. 127 ff.).

Übungsfragen zu den Abschnitten VIII bis X

1. Wie läßt sich das mathematische Modell eines geschlossenen Transportproblems formulieren?
2. Worin bestehen die besonders einfachen Eigenarten des Transportproblems, die die Anwendung der Transportmethode zur Optimierung erlauben?
3. Worin besteht das iterative Rechenverfahren der Transportmethode?
4. Wieviel von Null verschiedene Variablenwerte kann eine mit der Transportmethode bestimmte Basislösung höchstens umfassen? Wie läßt sich diese Anzahl begründen?
5. Welche Verfahren können bei der Transportmethode zur Bestimmung einer zulässigen Ausgangslösung (Basislösung) herangezogen werden?
6. Worin bestehen die Vor- und Nachteile der heuristischen Verfahren zur Bestimmung einer „guten" zulässigen Ausgangslösung?
7. Wie erkennt man die Degeneration (Entartung) einer mit Hilfe der Transportmethode bestimmten zulässigen Lösung? Wie läßt sie sich beheben?
8. Wie läßt sich die Vorgehensweise der MODI-Methode beschreiben?
9. Wie läßt sich die Vorgehensweise der Stepping-Stone-Methode beschreiben?
10. Wie werden die Opportunitätskosten für die Nichtbasisvariablen einer mit Hilfe der Transportmethode bestimmten Basislösung ermittelt?
11. Was ist der Inhalt des Transportkriteriums und wie läßt es sich anwenden?
12. Woran erkennt man optimale Mehrfachlösungen bei der Transportmethode?
13. Wie läßt sich die Matrix der Transportmethode, die die Optimallösung beinhaltet, ökonomisch interpretieren?
14. Wie können offene Transportprobleme durch ein geschlossenes Transportmodell beschrieben werden?
15. Läßt sich die Transportmethode auch auf andere als Transportprobleme anwenden (Beispiele)?
16. Wie lassen sich „zusätzliche Kapazitätsbeschränkungen" in der Transportmethode berücksichtigen?
17. Wie läßt sich eine Maximierungsaufgabe, die mit der Transportmethode gelöst werden soll, in eine Minimierungsaufgabe überführen?
18. Was versteht man unter einem „Zuordnungsproblem"?
19. Wie lautet der mathematische Modellansatz (in allgemeiner Form) des Zuordnungsproblems?
20. Worin besteht das iterative Rechenverfahren der Ungarischen Methode zur Lösung des Zuordnungsproblems?
21. Woran erkennt man optimale Mehrfachlösungen bei der Ungarischen Methode?

22. Welche wesentlichen Voraussetzungen müssen für die Anwendbarkeit der linearen Planungsrechnung bei betriebswirtschaftlichen Entscheidungen gegeben sein und wo liegen die bedeutenden Grenzen der Anwendbarkeit der linearen Planungsrechnung?
23. Welches sind die Hauptanwendungsgebiete der linearen Planungsrechnung in der Betriebswirtschaft und wie ist ihre Leistungsfähigkeit als Methode der Entscheidungsvorbereitung zu beurteilen?

Literatur zum 2. Kapitel

Über die Methoden der linearen Planungsrechnung und ihre Anwendung existiert eine nahezu unübersehbare Menge an Veröffentlichungen.

Als *mathematisch orientierte Standardwerke* sind etwa zu nennen:

Dorfman, R. u.a.: Linear Programming and Economic Analysis, New York–Toronto–London 1958.

Hadley, G.: Linear Programming, London 1962.

Gass, S. J.: Linear Programming, Methods and Applications, 2.A., New York/San Francisco/Toronto/London 1964.

Dantzig, G. B.: Lineare Programmierung und Erweiterungen, in: *Beckmann, M.* u.a. (Hrsg.): Ökonometrie und Unternehmensforschung, Bd. II (deutsche Übersetzung), Berlin/Heidelberg/New York 1966.

Collatz, L., Wetterling, W.: Optimierungsaufgaben, 2. A., Berlin–Heidelberg–New York 1971.

Schmitz, P., Schönlein, A.: Lineare und linearisierbare Optimierungsmodelle sowie ihre ADV-gestützte Lösung, Braunschweig 1978.

Einfachere Einführungen in die lineare Planungsrechnung bieten:

Joksch, H. C.: Lineares Programmieren, 2. A., Tübingen 1965.

Vokuhl, P.: Die Anwendung der linearen Programmierung in Industriebetrieben, Berlin 1965.

Künzi, H. P. u.a.: Mathematische Optimierung mit ALGOL-und FORTRAN-Programmen, Stuttgart 1967.

Niemeyer, G.: Einführung in die lineare Planungsrechnung, Berlin 1968.

Dinkelbach, W.: Sensitivitätsanalyse und parametrische Programmierung, Berlin–Heidelberg–New York 1969.

Bliefernich, M. u.a.: Aufgaben zur Matrizenrechnung und linearen Optimierung, Würzburg 1968.

Krekó, B.: Lehrbuch der Linearen Optimierung (deutsche Übersetzung), 5. A., Berlin 1970.

Soom, E.: Einführung in die lineare Programmierung, Bern 1970.

Zemke, G.: Lineare Optimierung, Braunschweig 1971.

Zimmermann, H.-J., Zielinski, J.: Lineare Programmierung, Ein programmiertes Lehrbuch, Berlin und New York 1971.

Bloech, J.: Lineare Optimierung für Wirtschaftswissenschaftler, Opladen 1974.

Schick, K.: Lineares Optimieren, 2. A., Frankfurt/M.–Berlin–München 1975.

Haupt, P., Lohse, D.: Grundlagen und Anwendungen der Linearen Optimierung, Essen 1975.

Igelbrink, H., Rottmann, U.: Lineare Optimierung, Baden-Baden und Bad Homburg v.d.H. 1977.

Dück, W.: Optimierung unter mehreren Zielen, Braunschweig 1979.

Bol, G.: Lineare Optimierung, Königstein 1980.

Schwarze, J.: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Bd. 3: Lineare Algebra und Lineare Programmierung, 6. A., Herne–Berlin 1981.

Die *Beziehungen zwischen linearer Planungsrechnung und Kostenrechnung* beschreiben:

Woitschach, M., Wenzel, G.: Lineare Planungsrechnung in der Praxis, 2. A., Stuttgart 1962.

Böhm, H. H., Wille, F.: Deckungsbeitragsrechnung und Optimierung, 3. A., München 1967.

Schweitzer, M., Hettich, O., Küpper, H.-U.; Systeme der Kostenrechnung, München 1975, S. 366 ff.

Anwendungsschwerpunkte der linearen Planungsrechnung behandeln:

Schmitz, P.: Möglichkeiten des Einsatzes elektronischer Datenverarbeitungsanlagen bei Media-Auswahl, in: Forschen–Planen–Entscheiden 1965, S. 22 ff.

Bussmann, K. F., Mertens, P. (Hrsg.): Operations Research und Datenverarbeitung bei der Produktionsplanung, Stuttgart 1968, I.

Bussmann, K. F., Mertens, P. (Hrsg.): Operations Research und Datenverarbeitung bei der Instandhaltungsplanung, Stuttgart 1968, II.

Fischer, H., Kluge, M.: Mathematische Methoden in der Planung (mit Beispielen aus der Gießereiindustrie), Leipzig 1968.

Münstermann, H.: Unternehmensrechnung, Wiesbaden 1969 – verschiedene Anwendungsbeispiele –.

Bichler, K.: Verbesserungen der betrieblichen Produktionsplanung durch Lineare Programmierung, Hamburg–Berlin 1970 – Anwendung auf Produktionsplanung –.

Rago, J. v.: Operations Research in der Produktionspraxis, Wiesbaden 1970 – Anwendung auf Produktionsplanung –.

Stahlknecht, P.: Operations Research, 2. A., Braunschweig 1970, S. 62 ff. – verschiedene Anwendungsbeispiele –.

Birman, J. J.: Lineare Optimierung in der Ökonomie (deutsche Übersetzung), Berlin 1971 – verschiedene Anwendungsbeispiele –.

Junk, H.: Optimale Werbeprogrammplanung – Grundlagen und Entscheidungsmodelle, 2. A., Essen 1973.

Kilger, W.: Optimale Produktions- und Absatzplanung, Opladen 1973, S. 95 ff.

Jacob, H.: Kurzlehrbuch Investitionsrechnung, Wiesbaden 1977, S. 60 ff. – Investitionsmodelle –.

Kilger, W.: Flexible Plankostenrechnung, 7. A., Opladen 1977, S. 673 ff. – Anwendung auf Produktionsplanung –.

Hilke, W.: Zielorientierte Produktions- und Programmplanung, Neuwied 1978.

Kruschwitz, L.: Investitionsrechnung, Berlin und New York 1978, S. 137 ff. – Anwendung auf Investitions- und Finanzplanung –.

Schneider, D.: Investition und Finanzierung, 5. A., Opladen 1980, S. 366 ff. – Anwendung auf Investitions- und Finanzplanung –.

ter Horst, K. W.: Investitionsplanung, Stuttgart 1980, S. 184 ff. – Anwendung auf Investitions- und Finanzplanung –.

Perridon, L., Steiner, M.: Finanzwirtschaft der Unternehmung, 2. A., München 1980, S. 108 ff. – Anwendung auf Investitions- und Finanzplanung –.

Adelberger, O. L., Günther, H. H.: Fall- und Projektstudien zur Investitionsrechnung, München 1982.

Sonstige Literatur zum 2. Kapitel

Stigler, G. J.: The Cost of Subsistance, in: Journal of Farm Economics, 1945, S. 303–314.

Dantzig, G. B.: Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities, in: *Koopmans, T. C.* (Hrsg.): Activity Analysis of Production and Allocation, New York 1951.

Ford, L. R., Fulkerson, D. R.: Solving the Transportation Problem, in: Management Science, 1956, S. 24–32.

Garvin, W. W. u.a.: Applications of Linear Programming in the Oil Industry, in: Management Science 1957, S. 407–430

Flood, M. M.: Operations Research and Logistics, in: Naval Research Logistics Quarterly, 1958, S. 323–335.

Knödel, W.: Ein Transportproblem, in: MTW-Mitteilungen, 1958, S. 71–83.

Krelle, W., Künzi, H. P.: Lineare Planungsrechnung, Zürich 1958.

Reinfeld, N. V., Vogel, W. R.: Mathematical Programming, Englewood Cliffs 1958.

Gülicher, H.: Eine Anwendung der Technik des linearen Programmierens zur Optimierung des Leerwagenumlaufs bei der Bundesbahn, in: Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft, 1959, S. 54–71.

Saaty, T. L.: Coefficient Perturbation of a Constrained Extremum, in: Operations Research 1959, S. 294–302.

Albach, H.: Lineare Programmierung als Hilfsmittel betrieblicher Investitionsplanung, in: ZfhF 1960, S. 526 ff.

Charnes, A., Cooper, W. W.: Chance-Constrained Programming, in: Management Science 1960, S. 73 ff.

Land, A. H., Doig, A. G.: An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems, in: Econometrica 1960, S. 497 ff.

Vajda, S.: Lineare Programmierung – Beispiele (deutsche Übersetzung), Zürich 1960.

Gamer, B.: Planung und Einsatz elektronischer Datenverarbeitungsanlagen in einem chemischen Großunternehmen, in: ZfhF 1961, S. 363 f.

Habr, J.: Die Frequenzmethode zur Lösung des Transportproblems und verwandter linearer Programmierungsprobleme, in: Wissenschaftliche Zeitschrift der Universität Dresden, 1961, S. 1069–1071.

Albach, H.: Investition und Finanzierung, Wiesbaden 1962.

Catchpole, A. R.: The Application of Linear Programming to Integrated Supply Problems in the Oil Industry, in: Operations Research Quarterly 1962, S. 161–169.

Day, R. L.: On Methods: Linear Programming in Media Selection, in: Journal of Advertising Research 1962, S. 40–44.

Jaspert, F.: Methoden zur Erforschung der Werbewirkung, Diss. Köln 1962.

Vazsonyi, A.: Die Planungsrechnung in Wirtschaft und Industrie (deutsche Übersetzung), Wien und München 1962.

Angermann, A.: Entscheidungsmodelle, Frankfurt/M. 1963.

Behrens, K. C.: Absatzwerbung, Wiesbaden 1963.

Dakin, R. J.: A Tree-Search Algorithm for Mixed Integer Programming Problems, in: The Computer Journal 1963, S. 250–255.

Gomory, R. A.: An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs, in: *Graves, R. L., Wolfe, P.* (Hrsg.): Recent Advances in Mathematical Programming, New York, San Francisco, Toronto, London 1963, I, S. 269 ff.

Gomory, R. A.: An All-Integer Programming Algorithm, in: *Muth, J. F., Thompson, G. L.* (Hrsg.): Industrial Scheduling, Englewood Cliffs, N. J. 1963, II, S. 193 ff.

Little, J. u.a.: An Algorithm for the Traveling Salesman Problem, in: Operations Research, 1963, S. 972–989.

Moxter, A.: Grenzen der Verfahrensforschung (Operations Research) im betriebswirtschaftlichen Bereich, in: Der Österreichische Betriebswirt, 1963, S. 181 ff.

Steinmann, H., Meyer, M.: Über ein spezielles Standortproblem, in: Industrielle Organisation 1963, S. 59 ff.

Zimmermann, H.-J.: Mathematische Entscheidungsforschung und ihre Anwendung auf die Produktionspolitik, Berlin 1963.

Azpeitia, A. G., Dickinson, D. J.: A Decision Rule in the Simplex-Method that Avoids Cycling, in: Numerische Mathematik, 1964, S. 329–331.

Buzzel, R. D.: Mathematical Methods and Marketing Management, Boston 1964.

Dinkelbach, W.: Zum Problem der Produktionsplanung in Ein- und Mehrproduktunternehmen, Würzburg 1964.

Hax, H.: Investitions- und Finanzplanung mit Hilfe der linearen Programmierung, ZfbF 1964, S. 430 ff.

Jacob, H.: Neuere Entwicklungen in der Investitionsrechnung, in: ZfB 1964, S. 487–507, S. 551–594.

Schreiter, D.: Die parametrische Linearprogrammierung, Anwendungsmöglichkeiten und Lösungsalgorithmus, in: Wirtschaftswissenschaft 1964, S. 1300 ff.

Shephard, R. W.: Linear Programming mit unbestimmten Werten, in: Ablauf- und Planungsforschung 1964, S. 68 ff.
Balas, E. A.: An Additive Algorithm for Solving Linear Programs with Zero-One Variabels, in: Operations Research 1965, S. 517 ff.
Brown, D. B., Warshaw, M. R.: Media Selection by Linear Programming, in: Journal of Marketing Research 1965, S. 83–88.
Stasch, S. F.: Linear Programming and Space Time Considerations in Media Selection, in: Journal of Advertising Research 1965, S. 40–46.
Tintner, G.: Stochastic Linear Programming with Illustrations, in: *Henn, R.* (Hrsg.): Operations Research Verfahren II, Meisenheim 1965, S. 108 ff.
Bloech, J.: Zum Problem der nachträglichen Änderung industrieller Produktionsprogramme, in: ZfB 1966, S. 190 ff.
Gutenberg, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Band 1: Die Produktion, 12. A., Berlin/Heidelberg/New York 1966.
Harder, T.: Elementare mathematische Modelle in der Markt- und Absatzforschung, München–Wien 1966.
Korndörfer, W.: Die Aufstellung und Aufteilung von Werbebudgets, Stuttgart 1966.
Marcus, P.: Der ökonomische Inhalt der Linearen Planungsrechnung, München 1966.
Runzheimer, B.: Das Experiment in der betriebswirtschaftlichen Forschung (Diss.), Karlsruhe 1966.
Jándy, G.: Optimale Transport- und Verkehrsplanung, Würzburg 1967.
Kern, W.: Optimierungsverfahren in der Ablauforganisation, Essen 1967.
Köhler, R.: Der Einsatz von Datenverarbeitungsanlagen für Optimierungsrechnungen bei Mineralölraffinerien, in: elektronische datenverarbeitung 1967, S. 306 ff.
Müller, O.: Lineare Programmierung unter Unsicherheit, in: *Henn, R.* (Hrsg.): Operations Research Verfahren III, Meisenheim 1967, S. 299 ff.
Müller-Merbach, H.: Lineare Planungsrechnung mit parametrisch veränderten Koeffizienten der Bedingungsmatrix, in: Ablauf- und Planungsforschung 1967, S. 341–354.
Seelbach, H.: Planungsmodelle in der Investitionsrechnung, Würzburg–Wien 1967.
Angermann, D. u.a.: Mathematische Modelle und Verfahren der Operationsforschung für die Lösung ökonomischer Probleme, Köln und Opladen 1968.
Gutenberg, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Band 2: Der Absatz, 11. A., Berlin/Heidelberg/New York 1968.
Henn, R., Künzi, H. P.: Einführung in die Unternehmensforschung I, Berlin 1968.
Kall, P.: Der gegenwärtige Stand der stochastischen Programmierung, in: Unternehmensforschung 1968, S. 81 ff.
Lange, O.: Optimale Entscheidungen, Grundriß der Optimierungsrechnung (deutsche Übersetzung), Berlin 1968.
Roy, B. (Hrsg.): Ablaufplanung, Anwendungen und Methoden, München–Wien 1968.
Runzheimer, B.: Die Situationskontrolle im Experiment, 1. Ergänzungsheft zur ZfB 1968, S. 59 ff.
Salzinger, M.: Mediaentscheidungen mit Hilfe linearer Planungsmodelle – Möglichkeiten und Grenzen, in: Der Markt 1968, S. 52–55.
Hadley, G.: Nichtlineare und dynamische Programmierung (deutsche Übersetzung), Würzburg/Wien 1969.
Hu, T. C.: Integer Programming and Network Flows, Menlo Park, California 1969.
Jaensch, G.: Betriebswirtschaftliche Investitionsmodelle und praktische Investitionsrechnung, in: ZfbF 1969, S. 48–57.
Lüder, K.: Zur Anwendung neuerer Algorithmen der ganzzahligen linearen Programmierung, in: ZfB 1969, S. 405–434.
Miller, D. W., Starr, M. K.: Executive Decisions and Operations Research, Englewood Cliffs 1969.
Sasieni, M., Yaspan, F., Friedman, L.: Methoden und Probleme der Unternehmensforschung, Würzburg 1969.

Tietz, B.: Grundlagen der Handelsforschung, Zürich 1969.
Charnes, A. u.a.: A Goal Programming Model for Media Planning, in: *Montgomery, D. B., Urban, G. L.* (Hrsg.): Applications of Management Science in Marketing, Englewood Cliffs, N.J. 1970, S. 190 ff.
Domsch, M.: Simultane Personal- und Investitionsplanung im Produktionsbereich, Bielefeld 1970.
Faber, M. M.: Stochastisches Programmieren, Würzburg–Wien 1970.
Hax, H. (Hrsg.): Entscheidung bei unsicheren Erwartungen, Köln und Opladen 1970.
Montgomery, D. B., Urban, G. L. (Hrsg.): Applications of Management Science in Marketing, Englewood Cliffs, N. J. 1970.
Piehler, J.: Ganzzahlige lineare Optimierung, Methoden und Probleme, Leipzig 1970.
Swoboda, P.: Simultane Planungsmodelle, in: *Kosiol, E.* (Hrsg.): Handwörterbuch des Rechnungswesens, Stuttgart 1970, S. 1403 ff.
Churchman, C. W. u.a.: Operations Research, Eine Einführung in die Unternehmensforschung (deutsche Übersetzung), 5. A., Wien 1971.
Dück, W., Bliefernich, M. (Hrsg.): Operationsforschung, Bd. 1–3, Berlin 1971/1972.
Greenberg, H.; Integer Programming, New York – London 1971.
Hanssmann, F.: Unternehmensforschung Hilfsmittel moderner Unternehmensführung, Wiesbaden 1971.
Kaplan, R. S., Shocker, A. D.: Discount Effects on Media Plans, in: Journal of Advertising Research 1971, S. 37–44.
Kotler, P.: Marketing Decision Making: A Model Building Approach, New York 1971.
Laux, H.: Flexible Investitionsplanung, Opladen 1971.
Meffert, H.: Die Anwendung mathematischer Modelle im Marketing – Teil 2, Wiesbaden 1971.
Schettler, K.: Planung der Jahresabschlußprüfung, Wiesbaden 1971.
Zimmermann, H.-J.: Einführung in die Grundlagen des Operations Research, München 1971.
Burkard, R. E.: Methoden der Ganzzahligen Optimierung, Wien–New York 1972.
Garfinkel, R. S., Nemhauser, G. L.: Integer Programming, New York 1972.
Gas, B.: Wirtschaftlichkeitsrechnung bei immateriellen Investitionen, Frankfurt–Zürich 1972.
Hax, H.: Investitionstheorie, 2. A., Würzburg-Wien 1972.
Kemeny, J. G. u.a.: Mathematik für die Wirtschaftspraxis (deutsche Übersetzung), 2. A., Berlin–New York 1972.
Körth, H. u.a.: Lehrbuch der Mathematik für Wirtschaftswissenschaften, Opladen 1972.
Lüder, K.: Standortwahl, Verfahren zur Planung betrieblicher und innerbetrieblicher Standorte, in: *Jacob, H.* (Hrsg.): Industriebetriebslehre, Band 1: Grundlagen, Wiesbaden 1972, S. 41 ff.
Weber, H. H.: Einführung in Operations Research, Frankfurt/M. 1972.
Bühler, W., Dick, R.: Stochastische lineare Optimierung, in: ZfB 1972, S. 677–692.
Haupt, P., Wegener, H.: Wirtschaftlicher Inhalt eines ausgewählten Optimierungsverfahrens, in: WIST 1973, S. 8–14.
Lazak, D.: Arbeitshandbuch zur Systemanalyse und exakten Unternehmensoptimierung, München 1973.
Müller-Merbach, H.: Operations Research, Methoden und Modelle der Optimalplanung, 3. A., München 1973.
Schweitzer, M.: Einführung in die Industriebetriebslehre, Berlin/New York 1973.
Hanssmann, K.-W.: Entscheidungsmodelle zur Standortplanung der Industrieunternehmen, Wiesbaden 1974.
Hax, H.: Entscheidungsmodelle in der Unternehmung/Einführung in Operations Research, Reinbek bei Hamburg 1974.
Kaufmann, A., Faure, R.: Methoden des Operations Research – Eine Einführung in Fallstudien (deutsche Übersetzung), Berlin–New York 1974.
Neumann, K.: Operations Research Verfahren, Bd. I Lineare Optimierung, Spieltheorie, Nichtlineare Optimierung, Ganzzahlige Optimierung, München 1975.

Neumann, K.: Operations Research Verfahren, Band III Graphentheorie und Netzplantechnik, München 1975.

Nieschlag, R. u.a.: Marketing, 8. A., Berlin 1975.

Schweiger, G.: Mediaselektion – Daten und Modelle, Wiesbaden 1975.

Sturm, S.: Operations Research, Stuttgart 1975.

Diruf, G., Schönbauer, J.: Operations Research Verfahren, München 1976.

Müller-Merbach, H.: Operations Research in der betrieblichen Bewährung, in: VWI (Zeitschrift des Verbandes Deutscher Wirtschaftsingenieure e.V.), H.1, Berlin 1976, S. 140–166.

Gaede, K.-W., Heinhold, J.: Grundzüge des Operations Research, Teil 1, München und Wien 1976.

Nieswandt, A.: Operations Research, Herne und Berlin 1977.

Zimmermann, W.: Planungsrechnung und Entscheidungstechnik, Operations Research Verfahren, Braunschweig 1977

Runzheimer, B.: Operations Research II: Methoden der Entscheidungsvorbereitung bei Risiko, Wiesbaden 1978.

Meißner, J.-D.: Heuristische Programmierung, Wiesbaden 1978.

Weber, H. H.: Einführung in Operations Research, 2. A., Wiesbaden 1978.

Blohm, H., Lüder, K.: Investition, 4. A., München 1978.

Albach, H.: Beiträge zur Unternehmensplanung, 3. A., Wiesbaden 1979.

Witte, Th.: Heuristisches Planen, Wiesbaden 1979.

Adam, D.: Kurzlehrbuch Planung, Wiesbaden 1980.

Huth, R., Pflaum, D.: Einführung in die Werbelehre, Stuttgart 1980.

Neubürger, K. W.: Risikobeurteilung bei strategischen Unternehmungsentscheidungen, Stuttgart 1980.

Riebel, P.: Einzelkosten- und Deckungsbeitragsrechnung, 4. A., Opladen 1981.

Pflaum, D., Eisenmann, H.: Praktische Investitionsgüterwerbung, München 1981.

Inderfurth, K.: Starre und flexible Investitionsplanung, Wiesbaden 1982.

Drittes Kapitel: Netzplantechnik (NPT)

Es ist interessant, daß aus einer sehr anspruchsvollen Disziplin der Mathematik, nämlich der *Graphentheorie*, zwei bedeutende Verfahren des Operations Research entwickelt wurden, die sehr anschaulich sind, und deren verfahrenstechnische Grundlagen leicht zu erlernen sind. Nicht zuletzt aus diesen Gründen handelt es sich dabei um OR-Verfahren, die in der Praxis neben der linearen Planungsrechnung am meisten angewendet werden. Es sind dies:

(1) die *Netzplantechnik* (NPT) zur Planung und Überwachung von Projekten;
(2) das *Entscheidungsbaumverfahren* zur Darstellung von Entscheidungsproblemen (vgl. *Runzheimer, B.*, 1978, S. 138 ff.).

I. Graphen als Hilfsmittel anschaulicher Darstellungen und Grundbegriffe der Graphentheorie

Unter einem *Graphen* versteht man eine (endliche oder unendliche) Menge von *Knoten*, die durch eine (endliche oder unendliche) Menge von Kanten einander zugeordnet sind. Es handelt sich dabei um ein bestimmtes Gebilde, das man durch eine Skizze (*graphisch*) in der Ebene oder im Raum gut veranschaulichen kann. Die *Kanten* oder Strecken können *gerichtet*, also mit einer Richtung versehen sein. Man nennt sie dann *Pfeile* und hat es mit einem *gerichteten Graphen* zu tun (Abb. 5b). Bei einem *ungerichteten Graphen* sind die Kanten in beiden Richtungen begehbar (Abb. 5a). Sind alle Knoten direkt oder indirekt durch Kanten miteinander verbunden, hat man es mit einem *zusammenhängenden Graphen* zu tun (Abb. 5a–5d).
Eine Folge von Pfeilen, bei der keine Abzweigungen auftreten, wird als *Kette* bezeichnet. Die Knoten, die auf einer solchen Kette liegen, haben die Eigenschaft, daß bei ihnen immer nur ein einmündender und ein abgehender Pfeil vorkommt (Abb. 5c). Eine Folge von Pfeilen, bei denen der Endknoten des einen Pfeils der Anfangsknoten des folgenden Pfeiles ist, wird als *Weg* bezeichnet (Abb. 5b). Ein *Baum* ist ein zusammenhängender Graph, bei dem von jedem Knoten zu allen anderen Knoten nur eine Kantenfolge führt (Abb. 5d).

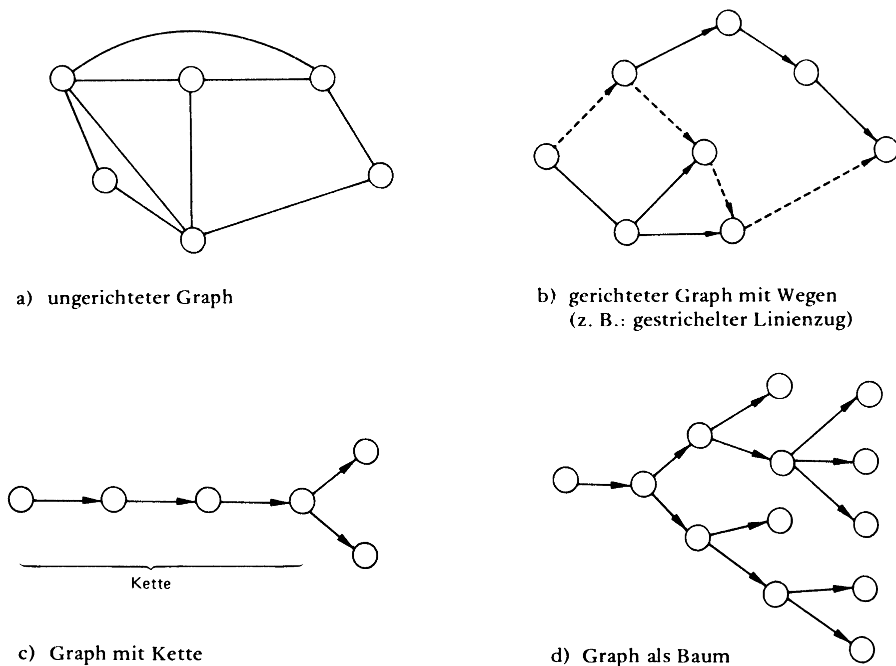


Abb. 5: Beispiele für Graphen

Eine *Schleife* ist ein Pfeil, der einen Knoten mit sich selbst verbindet. Von einem *Zyklus* spricht man, wenn ein Knoten über mehrere Pfeile mit sich selbst verbunden ist.

Graphen werden in mannigfacher Weise als Darstellungsformen verwendet. So können Graphen Netze wie Wasserversorgungs- und -entsorgungssysteme, Verkehrssysteme, Fernsprech-, Strom- und Gasleitungen darstellen. Ebensogut können durch Graphen Abläufe und Strukturen wie Organisationsstrukturen oder Kommunikationssysteme eines Unternehmens, Entscheidungsprozesse etc. dargestellt werden.

Im Rahmen der Graphentheorie sind für die Berechnung einiger Eigenschaften von Graphen besondere Algorithmen (Rechenverfahren) entwickelt worden – wie z.B. der Fulkerson-Algorithmus (*Müller-Merbach, H.*, 1973, S. 247 ff.) –. Mit diesen Algorithmen können beispielsweise optimale Wege in Graphen, maximale Flüsse (d.h. maximale Kapazitäten) von Netzwerken oder auch kostenminimale Flüsse bestimmt werden. Im Rahmen des OR spielen daher graphentheoretische Verfahren eine besondere Rolle bei:

(1) der anschaulichen graphischen Darstellung von Abläufen und Strukturen;

(2) der Berechnung von optimalen (längsten, kürzesten, kostenminimalen oder gewinnmaximalen) Wegen;

(3) der Berechnung maximaler Flüsse in Netzwerken.

Oft ist allein die Darstellung eines Sachverhaltes in Form eines Graphen schon von großem Wert. Als besonders wertvoll wird von Praktikern der Nutzen bezeichnet, der allein dadurch entsteht, daß es für die Aufstellung des Graphen erforderlich ist, das Problem bis in die Details zu durchdringen.

II. Grundlagen der Netzplantechnik

Die *Netzplantechnik (NPT)* stellt Methoden zur *Planung und Überwachung* von *Projekten* bereit. Die NPT hat mehrere voneinander unabhängige Wurzeln. 1957 wurde in USA bei Dupont de Nemours in Zusammenarbeit mit Ramington Rand die *„Critical Path Method" (CPM)* entwickelt. Beim Bau der Polarisrakete wurde 1958 das Planungssystem *„Program Evaluation and Review Technique" (PERT)* geschaffen. Gleichzeitig wurde von einer französischen Beratungsfirma, die zu einer internationalen Gruppe von Beratungsfirmen namens METRA gehört, die *Metra-Potential-Methode (MPM)* als Terminplanungsmethode für den Reaktorbau entwickelt. All diese Methoden besitzen ein gemeinsames Merkmal. Sie haben ein *graphisches Modell* des zeitlichen Ablaufs eines Projektes, das *Netzplan* genannt wird, zur Grundlage. Man faßt daher CPM, PERT, MPM und ihre zahlreichen Varianten und Weiterentwicklungen unter dem Begriff *Netzplantechnik* (auch Netzwerktechnik oder Netzwerkanalyse genannt) zusammen. Die mathematische Grundlage der NPT bildet die Graphentheorie.

Unter *NPT* versteht man alle Verfahren zur:

(1) Beschreibung,
(2) Planung,
(3) Steuerung,
(4) Überwachung

von Projektabläufen auf der Grundlage von *Netzplan-Modellen.*

Die vorstehende Definition entspricht DIN 69 900. Soweit die hier benötigten Begriffe vereinheitlicht sind, werden sie der genannten Norm bzw. den Empfehlungen der Deutschen Gesellschaft für Operations Research entnommen (vgl. *Häger, W., Waschek, G.,* 1972, S. B. 1 ff.).

Die Ausführung von Projekten benötigt *Zeit*, verursacht *Kosten* und erfordert den Einsatz gewisser Hilfsmittel (*Einsatzmittel*), worunter die sog. „Einsatzfaktoren", also Betriebsmittel (Maschinen etc.), Arbeitskräfte und Werkstoffe, verstanden werden. Entsprechend werden in der *NPT* Methoden zur:

(1) Zeitplanung (Terminplanung),
(2) Kostenplanung,
(3) Kapazitätsplanung,
(4) Finanzplanung

bereitgestellt.

Kernstück der NPT ist die Zeitplanung. Auf den Ergebnissen der Zeitplanung bauen alle weiteren Anwendungen auf.

Als *Beispiele* für die Anwendung der NPT seien genannt:

Der Aufbau einer Fabrik, die Durchführung von Wartungsarbeiten, die Entwicklung eines Waffensystems und der Bau eines Atomkraftwerkes waren die ersten Anwendungen. In der Zwischenzeit wird die NPT in vielen Bereichen der Wirtschaft eingesetzt. Einige weitere Anwendungsbereiche sind (wegen der entsprechenden Literaturquellen siehe *Wille, H.* u.a., 1972, S. 16):

(1) Entwicklung von Flugzeugen,
(2) Ausbau eines Hotels,
(3) Bau einer Universität,
(4) Planung der Herstellung von elektrischen Relais,
(5) Vorbereitung des Einsatzes einer EDV-Anlage,
(6) Bau von Autobahnen,
(7) Entwicklung und Konstruktion eines Nachrichtensystems,
(8) Montage einer Telegraphie-Speichervermittlung,
(9) Bau eines Wohnblocks,
(10) Durchführung eines Wahlkampfes.

Bei diesen Anwendungsbeispielen handelt es sich um Projekte. Der Begriff *Projekt* steht im Gegensatz zu sich dauernd wiederholenden Vorgängen. Er beinhaltet, daß eine Leistung einmalig in ganz bestimmter Art und Weise durchgeführt wird.

Da sich solche Projekte gewöhnlich nicht identisch wiederholen bzw. überhaupt noch nicht abgewickelt wurden, kann sich der Planer nicht allein auf seine Erfahrungen mit ähnlichen Projekten stützen. Er benötigt ein Hilfsmittel wie die NPT.

Welche *Voraussetzungen* hat ein Projekt zu erfüllen, damit es mit der NPT geplant und seine Abwicklung gesteuert und überwacht werden kann?

(1) Es geht um die Erreichung bestimmter *vorgegebener Ziele.* Dabei muß es sich um ein *abgeschlossenes Projekt* handeln, bei dem Anfangs- und Endpunkte definierbar sind.
(2) Das Projekt muß in *einzelne Vorgänge* (Aufgaben, Tätigkeiten, Aktivitäten, „jobs") *aufgegliedert* werden können. Alle Vorgänge, die zur Erreichung der Ziele erledigt sein müssen, bilden das Projekt.
(3) Diese Aufgaben unterliegen hinsichtlich ihrer Durchführung *Reihenfolgebedingungen,* die auf die *Projektlogik* zurückzuführen sind. Ein Vorgang kann z.B. erst nach Abschluß von anderen Vorgängen begonnen werden. Diese Vorgänge beanspruchen Zeit, Einsatzmittel und verursachen damit Kosten.
(4) Es muß sichergestellt werden können, daß die plangerechte Durchführung des Projektes *kontrolliert* werden kann, d.h. zu jedem Zeitpunkt der Projektrealisierung muß es möglich sein, *Soll-Ist-Vergleiche* durchzuführen, um ggf. *Anpassungsmaßnahmen* ergreifen zu können (Steuerungsmöglichkeit).

Ein großer *Vorteil der NPT* besteht darin, daß durch die *graphische Darstellung* ein Projekt *transparent* gemacht wird. Insbesondere können die *gegenseitigen Abhängigkeiten der Vorgänge* klar dargestellt werden.

Die vor der Entwicklung der NPT häufig verwendeten Balkendiagramme (Gantt-Charts) sind im Bereich der Planung den Verfahren der NPT unterlegen, weil sie

einerseits die Abhängigkeiten zwischen den Vorgängen nicht befriedigend aufzeigen und damit nur für die Planung kleiner, überschaubarer Projekte geeignet sind. Andererseits fällt es äußerst schwer, bei sich ändernden Reihenfolgebedingungen oder veränderlichen Vorgangsdauern die erforderlichen Anpassungen in den Diagrammen vorzunehmen (*Bergen, R., Bubolz, P.*, 1974, S. 2 f.).
Ein weiterer Vorteil der NPT ist es, daß sie ohne aufwendige zusätzliche Vorarbeiten durchgeführt werden kann. Darüber hinaus kann sie sich der Unterstützung durch EDV bedienen. Die NPT verlangt nicht zwangsläufig den Einsatz der EDV. Kleinere Netzpläne bis zu etwa 100 Vorgängen können z.B. ohne weiteres manuell durchgerechnet werden.
Nach einer von verschiedenen Autoren vorgeschlagenen Gliederung zerfällt die NPT in die *Stufen:*
(1) Strukturanalyse – Strukturplanung,
(2) Zeitanalyse – Zeitplanung,
(3) Kostenanalyse – Kostenplanung,
(4) Kapazitätsanalyse – Kapazitätsplanung.
Die Stufen können jedoch nicht losgelöst voneinander und auch nicht für ein Projekt allein betrachtet werden. Vielmehr unterliegen die Ergebnisse jeder Planungsstufe starken Einflüssen aus anderen Stufen bzw. aus den Planungen für andere Projekte. Damit sind die eigentlichen *Probleme der NPT* angesprochen. Wenn nach einem ersten Planungsschritt (Strukturplanung, Ablaufplanung) mit einer gewissenhaften Erfassung und graphischen Darstellung des Ablaufs an die Zeitplanung als dem zweiten Schritt gegangen wird, so erscheint dies vom Standpunkt des Praktikers insofern als eine reichlich theoretische Angelegenheit, als die vorgenommenen Zeitplanungen unter einer ganzen Reihe von Abstraktionen erfolgen. Bei der Zeitplanung sind nicht nur die Struktur und die Zeit, sondern auch die Kosten und die Kapazitäten zu ermitteln und zu berücksichtigen. Die Projektplanung kann folglich erst als abgeschlossen gelten, wenn in allen Stufen des behandelten Projektes und unter Berücksichtigung der außerdem im Betrieb noch abzuwickelnden Projekte eine durchführbare Lösung gefunden ist, die darüber hinaus noch den betrieblichen Zielen möglichst nahe kommt (*Thumb, N.*, 1969, S. 21).

III. Strukturplanung

Die Planung der *Ablaufstruktur* eines Projektes setzt detaillierte Informationen über die Struktur des Projektes voraus. Der eigentlichen *Strukturplanung* muß also eine *Analyse der Ablaufstruktur* des Projektes vorausgehen.

A. Strukturanalyse

Der *erste Schritt der Strukturanalyse* besteht darin, daß man *sämtliche Vorgänge* des Projektes *ermittelt*, d.h. das Gesamtprojekt in die erforderlichen Arbeitsgänge

zerlegt. *Vorgänge* sind alle Aktivitäten, die *Zeit beanspruchen,* also auch Lieferzeiten, technisch bedingte Wartezeiten – z.B. Abbindezeit von Beton –, Liegezeiten etc. Sämtliche Vorgänge des Projektes werden in einer Liste (*Vorgangsliste*) zusammengestellt.

Es erhebt sich hier die Frage, wie detailliert, d. h. wie fein soll das Projekt im Netzplan dargestellt werden? Die Grundsatzentscheidung ist, was als Vorgang angesehen werden soll, d. h. vor allem wie „groß" die Vorgänge sein sollen. Der Begriff des Vorganges ist sehr weit gefaßt. Man kann z. B. das Anbringen des Innenputzes in einem Gebäude als *einen* Vorgang betrachten. Es ist aber auch möglich, diese Arbeiten aufzuteilen und beispielsweise das Verputzen jeder Zimmerdecke, jeder Zimmerwand, das Einputzen der Fenster etc. jeweils als einen Vorgang aufzufassen. Wie *fein* man die Analyse und Planung der Ablaufstruktur eines Projektes zweckmäßigerweise vornehmen soll, kann nicht allgemein beantwortet werden. Die Gliederung eines Projektes in *Vorgänge* wird so fein vorgenommen, daß eine hinreichende Abgrenzung jedes Vorgangs gegenüber den anderen Vorgängen möglich ist und Informationen über Abhängigkeiten der Vorgänge nicht verlorengehen. Der Grad der Zerlegung des Projektes bzw. des Netzplans (*Detaillierungsgrad*) hängt in erster Linie davon ab, wieviel Informationen man dem Netzplan entnehmen will. Je nach Verwendungszweck – z. B. Information für die Geschäftsleitung oder für den Bauleiter – wird man häufig für *dasselbe Projekt verschiedene Netzpläne unterschiedlichen Detaillierungsgrades* erstellen. Bei größeren Projekten (insbesondere, wenn sie sich über einen längeren Zeitraum erstrecken) ist es zweckmäßig, so vorzugehen, daß man das Projekt zunächst nur sehr grob analysiert und einen *Übersichtsnetzplan* (Grob- oder Rahmenplan) erstellt. Die Vorgänge dieses Übersichtsplanes umfassen jeweils mehrere Aktivitäten („Sammelvorgänge"). Die möglichst geschlossenen und abgrenzbaren Teile des Übersichtsplanes können dann zerlegt werden. Jede Detaillierung (Verfeinerung) eines Netzplanes stellt eine Untergliederung in kleinere Vorgänge dar. Umgekehrt können Vorgänge eines *Detailnetzplanes* durch Zusammenfassung *verdichtet* werden; dies bedeutet dann einen Übergang vom Detailnetzplan zum Übersichtsnetzplan.

Bei Projekten, die sich über einen längeren Zeitraum erstrecken, stellt der Übersichtsnetzplan zunächst nur grob den Ablauf des Projektes dar. Im Verlauf der Realisierung des Projektes wird dann schrittweise die Detailplanung vorgenommen. Diese schrittweise (z. B. in regelmäßigen Zeitabständen erfolgende) Verfeinerung des Netzplanes kann einmal angezeigt sein, um den Planungsaufwand zeitlich zu verteilen. Die mangelhafte Überschaubarkeit und große Unsicherheit über die Ablaufstruktur eines Projektes zu Beginn der Planung (z. B. bei Forschungs- und Entwicklungsprojekten) kann ebenfalls ausschlaggebend für eine schrittweise Verfeinerung des Netzplanes sein.

Hat man alle Vorgänge des Projektes zusammengestellt, dann werden im *zweiten Schritt der Strukturanalyse* die logisch bzw. technologisch und wirtschaftlich bedingten *Abhängigkeiten zwischen den Vorgängen ermittelt.* Hierbei geht es vor allem um die *Reihenfolge* der Vorgänge.

Dabei sind für jeden Vorgang folgende Fragen zu beantworten:

(1) Welche Vorgänge gehen dem in Frage stehenden Vorgang unmittelbar voraus;

welche Vorgänge müssen beendet sein, damit der betreffende Vorgang beginnen kann? Das Ergebnis sind die „*Vorgänger*" des betrachteten Vorgangs (z.B. müssen die Fundamente ausgeschachtet sein, bevor sie betoniert werden können – Ausschachten der Fundamente ist Vorgänger für Betonieren der Fundamente).

(2) Welche Vorgänge schließen sich unmittelbar an den betrachteten Vorgang an? Das Ergebnis sind die „*Nachfolger*" des betreffenden Vorgangs. Für die Strukturplanung ist es ausreichend, wenn man entweder die *Vorgänger oder die Nachfolger* für jeden Vorgang bestimmt.

(3) Welche Vorgänge können *parallel ausgeführt* werden?

Bei der Strukturanalyse eines Projektes wird man feststellen, daß ein großer Teil der *Abhängigkeiten nicht eindeutig* festliegt. Die Reihenfolge von Vorgängen kann also vertauscht werden. Vielfach können Vorgänge sowohl nacheinander als auch parallel durchgeführt werden. Hier entscheiden dann oft Fragen der Zweckmäßigkeit oder Kapazitätsüberlegungen. Bei der Projektplanung muß man sich jedoch für eine Abhängigkeit eindeutig entscheiden. Sind andere Abhängigkeiten möglich, so kann man diese festhalten (protokollieren), um darauf bei einer eventuell erforderlichen Planrevision zurückzugreifen (*Schwarze, J.*, 1979, S. 34).

In der *Vorgangsliste* können neben den Vorgängen des Projektes und den ermittelten Abhängigkeiten weitere wichtige Informationen zusammengestellt werden, wie z.B. die für die Ausführung verantwortlichen Stellen, Zeitbedarf, Kosten und differenzierter Kapazitätsbedarf der Vorgänge.

Für ein *Projektbeispiel* („Bau einer Fabrikationshalle") – das im folgenden zur Veranschaulichung ständig herangezogen werden soll – ist das *Ergebnis der Strukturanalyse* in einer *Vorgangsliste* wiedergegeben (Tabelle 86).

Das Projekt umfaßt den Bau einer Fabrikationshalle. Zu jedem Vorgang ist ein Buchstabe angegeben, der später als Abkürzung für den jeweiligen Vorgang benutzt werden soll.

Ein Projekt läßt sich leicht in *Teilprojekte* zerlegen, um die Übersichtlichkeit nicht zu stören. Im Beispiel bietet sich folgende Teilung z.B. an:

- Teilprojekt I: Rohbauerstellung,
- Teilprojekt II: Ausbau und Fertigstellung.

In den Teilnetzplänen sind die Übergänge zu anderen Teilnetzen („Anschlußereignisse") besonders zu kennzeichnen.

Im Gegensatz zu dem Projektbeispiel muß nicht immer der genaue Projektablauf bereits im Planungsstadium bekannt sein. Bei sogenannten *stochastischen Strukturen* (*Wegner, F.E.H.*, 1972, S. 39 ff.) ist der Projektablauf ungewiß, weil nicht von vornherein sicher ist, welche erfaßten denkmöglichen Vorgänge tatsächlich realisiert werden. Das ergibt sich erst bei Realisierung des Projekts und ist abhängig von den vorher gewonnenen Ergebnissen (z. B. Forschungs- und Entwicklungsprojekte). Einzelne Vorgänge des Projekts werden dann nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit realisiert, und es ist mit verschiedenen „Projektausgängen" zu rechnen. (Zur Behandlung der stochastischen Projektstrukturen wurde erst in den letzten Jahren ein Zweig der NPT entwickelt (*Entscheidungsnetzpläne*); vgl. *Neumann, K.*, 1975, III, S. 320 ff.).

Tabelle 86: Vorgangsliste mit Abhängigkeiten und Ausführungsdauer für das Projekt: Bau einer Fabrikationshalle

	Vorgang	Vorgänger	Ausführungs-dauer in Tagen
A	Fundamente ausschachten	–	4
B	Anschlüsse herstellen	–	5
C	Streifenfundamente betonieren	A	1
D	Maschinenfundamente betonieren	A, B	2
E	Fußboden betonieren	C, D	2
F	Abbindedauer des Fußbodenbetons	E	16
G	Außenwände hochziehen	C	20
H	Innenwände hochziehen	F	12
I	Großbehälter installieren	F	3
J	Dachdecke einschalen	G, H, I	4
K	Dachdecke betonieren	J	3
L	Abbindedauer des Deckenbetons	K	16
M	Dach abdichten	L	4
N	Dachdecke ausschalen	L	3
	(Rohbauabnahme)		
P	Elektro-, Wasser- und Heizungsinstallation	M, N	10
Q	Schwimmenden Zementestrich einbringen	P	2
R	Abbindedauer des Estrichs	Q	10
S	Abtrocknungsdauer des Estrichs	Q	40
T	Fenster einsetzen	M, N	2
U	Innenputz anbringen	R, T	5
V	Türen einsetzen	U	2
W	Außenputz anbringen	T	4
X	Anstreicherarbeiten (innen)	U	6
Y	Fußboden verlegen	S, V, X	3
Z	Gebrauchsabnahme für die Fabrikationshalle	W, Y	1

B. Darstellung der Ablaufstruktur

1. Formen der Netzplandarstellung

Die *Darstellungsform der NPT* ist der endliche *gerichtete Graph*. Jedes Netz besteht also aus einer Reihe von Knoten, die untereinander durch Pfeile (gerichtete Kanten) verbunden sind. Je nachdem, ob man bei der graphischen Darstellung die Vorgänge durch die Pfeile oder durch die Knoten des Netzes darstellt, unterscheidet man:

(1) kanten- oder pfeilorientierte und
(2) knotenorientierte Netzwerke:

(1a) Liegt das Schwergewicht der Projektplanung auf der Betrachtung der *Vorgänge*, so spricht man von *Vorgangspfeilnetz*, wenn die Vorgänge durch die *Pfeile* dargestellt werden. Vorgangspfeilnetze werden bei CPM verwendet.

(1b) Liegt das Schwergewicht der Projektplanung auf der Betrachtung der *Ereignisse*, so spricht man von *Ereignisknotennetz*, wenn die Ereignisse durch die *Knoten* dargestellt werden. Ereignisknotennetze werden bei PERT verwendet.

(2) Liegt das Schwergewicht der Projektplanung auf der Betrachtung der Vorgänge, so spricht man von *Vorgangsknotennetz*, wenn die Vorgänge durch die *Knoten* dargestellt werden. Vorgangsknotennetze werden bei MPM verwendet.

In der praktischen Anwendung der Netzplantechnik findet man die Vorgangspfeilnetze nach *CPM* am meisten verbreitet (*Elsässer, F.*, 1973, S. 17). In der jüngeren Vergangenheit ist man zunehmend zu Vorgangsknotennetzen (nach MPM) übergegangen (*Schwarze, J.*, 1979, S. 25). Vorgangsknotennetze bieten eine Reihe von Vorzügen, auf die später eingegangen wird.

2. Critical Path Method – CPM

Die *„Methode des kritischen Weges"* (*CPM*) arbeitet mit *Vorgangspfeilnetzen*. Die Abhängigkeiten zwischen den Vorgängen werden bei CPM durch Pfeile dargestellt, indem man die Knoten zweier unmittelbar aufeinanderfolgender Vorgänge durch Pfeile verbindet. Hierbei kommt der Länge und Form der Pfeile keine Bedeutung zu.

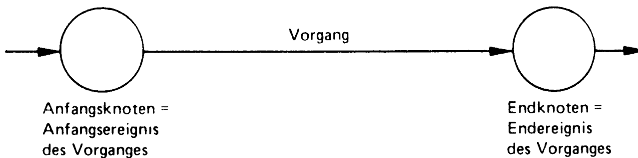


Abb. 6: Anordnungsbeziehung

Zu jedem Vorgang gehört ein *Anfangsereignis* und ein *Endereignis*. Die Ereignisse heißen auch *Zeitpunkte*. Z.B. sind der Beginn und das Ende des ersten oder n-ten Vorgangs Ereignisse. Besonders zu erwähnen sind das *Startereignis* (Beginn der Projektdurchführung – Beginn des ersten Vorgangs) und das *Zielereignis* (Endereignis = Fertigstellung des Projektes).

Ereignisse, denen bei der Projektrealisierung eine besondere Bedeutung beigemessen wird, heißen *Meilensteine* (z.B. Rohbaufertigstellung). Meilensteine werden in der Praxis besonders gekennzeichnet.

Die Anordnungsbeziehungen in diesem System setzen voraus, daß jeder dargestellte Vorgang (oder „Teil"-Vorgang) abgeschlossen sein muß, ehe nachfolgende Vorgänge beginnen können („Ende-Anfang-Beziehung" zweier aufeinanderfolgender Vorgänge). Durch diese eindeutige Regelung ist die manuelle Berechnung eines Netzplanes nach CPM relativ einfach. Jeder Knoten stellt – abgesehen von Start- und

Zielereignis – zugleich Anfangs- und Endereignis für verschiedene Vorgänge dar. Anfang und Ende eines jeden Vorgangs werden durch je einen Knoten bezeichnet und eindeutig numeriert. Dabei können die Knoten des Netzplanes mehrwertig sein, d. h. Ereignisse können mehrwertig sein:

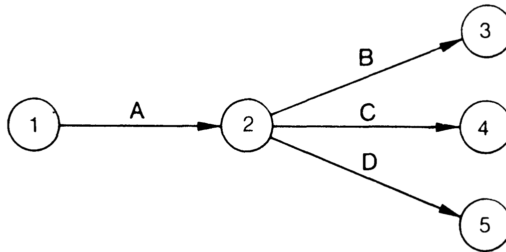


Abb. 7: Anordnungsbeziehung

Haben mehrere Vorgänge B, C, D einen gemeinsamen Vorgänger A (A hat dann B, C, D als Nachfolger), so ist Knoten 2 Endereignis von A und zugleich Anfangsereignis von B, C, D (also *aller* unmittelbar nachfolgenden Vorgänge). Auch der umgekehrte Fall ist denkbar:

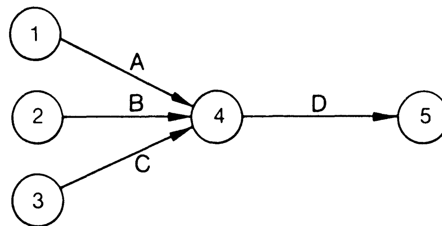


Abb. 8: Anordnungsbeziehung

Hier ist das Anfangsereignis von D (Knoten 4) das gemeinsame Endergebnis von A, B, C.

Solche mehrwertigen Ereignisse werden auch *Sammelereignisse* (Knoten 2 in Abb. 7 und Knoten 4 in Abb. 8) genannt.

Zwei Ereignisse (Knoten) dürfen nur durch *einen* Pfeil miteinander verbunden werden. Das bedeutet zunächst, daß es nicht möglich ist, parallel verlaufende Vorgänge im Netzplan darzustellen. Durch die Einführung von *Scheinvorgängen* läßt sich dieses Problem jedoch leicht lösen. Haben zwei Vorgänge A und B gemeinsame Anfangs- und Endereignisse (d.h. können sie gleichzeitig beginnen und enden), so ist ein *Scheinvorgang S* erforderlich:

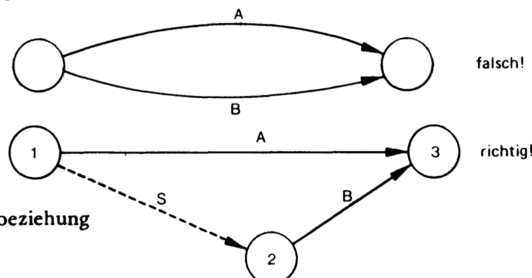


Abb. 9: Anordnungsbeziehung mit Scheinvorgang

Hängen zwei oder mehrere Vorgänge mit verschiedenen Anfangs- und Endereignissen zusammen (z.B. muß ein „Katalog konzipiert" und müssen die „Preise für die anzuliefernden Waren festgelegt" sein, bevor der Vorgang „Katalog drucken" beginnen kann), so ist ebenfalls ein Scheinvorgang S erforderlich.

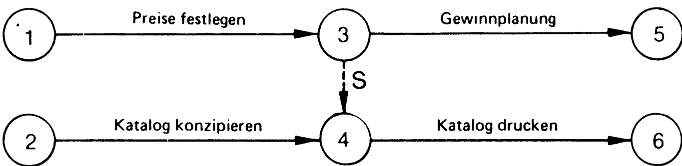


Abb. 10: Anordnungsbeziehung mit Scheinvorgang

Ein *Scheinvorgang* ist ein fiktiver Vorgang *ohne Zeitbedarf;* er wird durch einen *gestrichelten Pfeil* dargestellt.
Kann ein Vorgang B schon beginnen, bevor der vorhergehende Vorgang A ganz beendet ist (*überlappte Vorgänge*), so ist der letztere zu unterteilen:

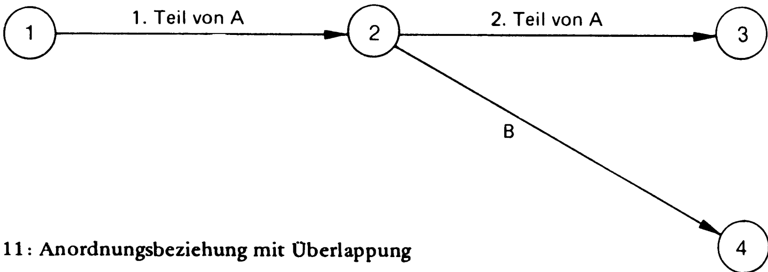


Abb. 11: Anordnungsbeziehung mit Überlappung

Für das Projektbeispiel (Tabelle 86) ergibt sich folgender *Strukturplan* (Das „Anschlußereignis" – Übergang von Teilprojekt I zu Teilprojekt II – ist besonders gekennzeichnet: ◈):

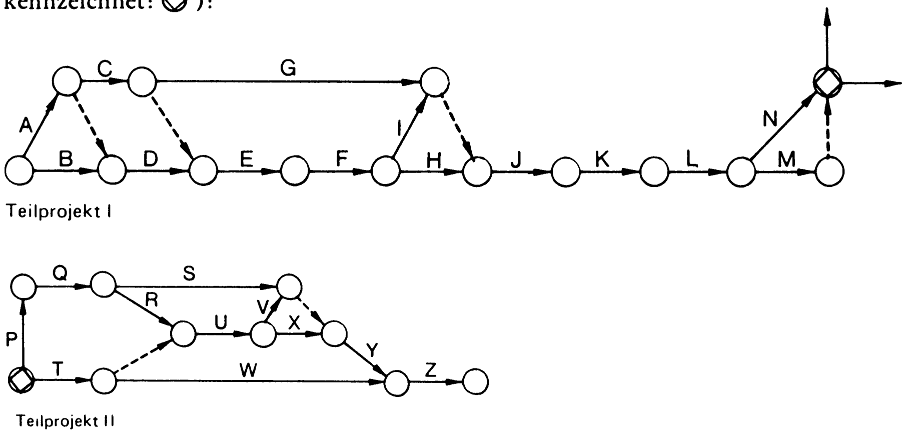
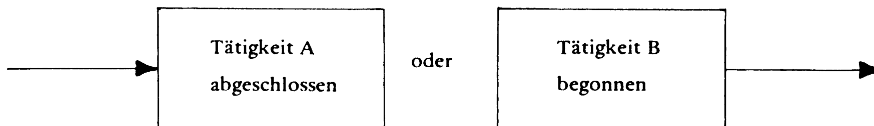


Abb. 12: Netzplan des Beispiels aus Tabelle 86

3. Program Evaluation and Review Technique – PERT

Ebenso wie bei CPM stellen in einem Netzplan nach *PERT* die Pfeile Vorgänge und die Knoten Ereignisse dar. Im Gegensatz zu CPM liegt bei PERT das Schwergewicht auf den Ereignissen, weil bei PERT Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten von Ereignissen angegeben werden.

Die Anordnungsbeziehungen des PERT-Planes entsprechen völlig den Anordnungsbeziehungen in einem CPM-Plan. Sie werden lediglich im Sinne der Ereignisorientierung anders ausgedrückt (Ereignisknotennetz).
Es gibt zwei prinzipielle Arten, wie man Ereignisse in einem PERT-Plan beschreiben kann:



Ereignisknotennetze werden für spezielle Aufgaben aufgestellt; ihnen kommt in erster Linie für Übersichtsnetzpläne Bedeutung zu. In der Praxis werden nicht selten sowohl Vorgänge (Pfeile) als auch Ereignisse (Knoten) im Netzplan dargestellt (gemischtorientierte Netzpläne). CPM und PERT gestatten die Berechnung solcher gemischtorientierten Netzpläne ohne besondere Schwierigkeiten.

4. Metra-Potential-Methode – MPM

Die *„Metra-Potential-Methode" (MPM)* arbeitet mit Vorgangsknotennetzen, d. h. die Vorgänge werden durch Knoten – bei MPM als Rechtecke gezeichnet – dargestellt. MPM ist ebenso wie CPM vorgangsorientiert. Im Gegensatz zu CPM werden die Vorgänge bei MPM jedoch nicht durch Pfeile symbolisiert, sondern durch Knoten. Bei CPM wird davon ausgegangen, daß alle Vorgänge im Netzplan erst beginnen können, wenn ihre Vorgänger beendet sind. MPM hingegen geht davon aus, daß eine Reihe von Vorgängen bereits beginnen kann, bevor ihre Vorgänger beendet sind; es genügt ein bestimmter Fertigstellungsgrad der Vorgänger.
Bei MPM geben die Pfeile lediglich die Abhängigkeitsbeziehungen der Vorgänge (Reihenfolgebedingungen) an. Im Gegensatz zu CPM und PERT handelt es sich bei MPM um eine *Anfang-Anfang-Beziehung,* d. h. zwei aufeinanderfolgende Vorgänge werden nach der Start-Startkopplung verknüpft. Danach muß ein Vorgang lediglich begonnen sein, bevor der nächste beginnen (starten) kann. Aus einem Strukturplan nach MPM kann der Abschluß von Vorgängen nicht entnommen werden; diese Informationen erhält man erst im Zusammenhang mit der Zeitplanung. Im übrigen stimmen die Darstellungsregeln von MPM mit denen von CPM und PERT überein. So sind beispielsweise auch bei MPM keine Schleifen möglich.
Abweichungen in den Darstellungsformen ergeben sich aus den speziellen Möglichkeiten von Vorgangsknotennetzen. Bei MPM stellt man allen den Vorgängen, die

nicht innerhalb des untersuchten Projektes vom Beginn weiterer Vorgänger abhängig sind, einen Scheinvorgang „Start" voran; analog wird den Vorgängen ohne weitere Nachfolger ein Scheinvorgang „Ende" nachgeordnet (vgl. Abb. 13, S. 172). Diese beiden Scheinvorgänge haben jedoch nicht etwas mit der Projektlogik zu tun, wie es bei den Scheinvorgängen nach CPM der Fall ist, sondern sie ergeben sich allein aus einer rechentechnischen Vereinfachung. Sie sind auch nur dann notwendig, wenn sonst mehrere Vorgänge am Anfang oder am Ende des Netzplanes isoliert würden.

5. *Gegenüberstellung der Netzplantypen Vorgangspfeilnetz (CPM) und Vorgangsknotennetz (MPM)*

Die Vorgangsknotennetze haben gegenüber den Vorgangspfeilnetzen folgende Vorzüge:

(1) Bei einem Vorgangsknotennetz können in einem *Knoten alle wichtigen Informationen, die den Vorgang betreffen, aufgenommen werden* (z. B. Beschreibung des Vorgangs, Vorgangsnummer, Dauer des Vorgangs, frühester und spätester Anfang bzw. Ende des Vorgangs, Pufferzeiten des Vorgangs, kostenrechnerische und kapazitätsbezogene Angaben). Diese Angaben lassen sich in einem Vorgangsknotennetz noch unterbringen, ohne daß der Netzplan unübersichtlich (und damit unlesbar) wird. In einem Vorgangspfeilnetz ist dies kaum realisierbar.

(2) Abgesehen von „Start" und „Ende" kommt das Vorgangsknotennetz vollkommen ohne Scheinvorgänge aus, während die Vorgangspfeilnetze aus Gründen der Projektlogik mit *Scheinvorgängen* arbeiten müssen. Dieser Umstand kann bei umfangreichen Projekten mit komplexen Ablaufstrukturen die Übersichtlichkeit des Netzplanes beeinträchtigen.

(3) *Änderungen im Netzplan* lassen sich in einem Vorgangsknotennetz einfach und schnell durchführen. Sind z. B. in einem bereits gezeichneten Netzplan Fehler aufgetaucht oder haben sich nachträglich andere Reihenfolgebeziehungen herausgestellt, so ist es in einem Vorgangsknotennetz ohne weiteres möglich, durch Wegnahme bzw. Hinzufügen von Pfeilen den Netzplan zu berichtigen. Bei Vorgangspfeilnetzen ist eine derartige Anpassung sehr aufwendig. Gewöhnlich wird es sich bei einer derartigen Änderung in einem Netzplan nach CPM nicht vermeiden lassen, daß Teile des Netzplans neu gezeichnet werden müssen.

(4) Vorgangsknotennetze lassen sich *einfacher und schneller zeichnen* als Vorgangspfeilnetze. Beim Zeichnen von Vorgangsknotennetzen können leicht einige Organisationsmittel (wie Magnettafeln mit magnetisch haftenden Vorgangsknoten, selbstklebende Etiketten, die man als Vorgangsknoten mit geeigneter Knotenaufteilung drucken lassen kann bzw. Verwendung von Stempeln für die Vorgangsknoten) eingesetzt werden. Um den Zeichenaufwand gering zu halten, lassen sich „Entwurfsbogen" verwenden, die mit einer größeren Zahl von Knoten („Vorgangsknoten") bedruckt sind. Beim ersten Entwurf des Netzplans werden dann geeignete Knoten benutzt und durch die die Abhängigkeiten darstellenden Pfeile verbunden:

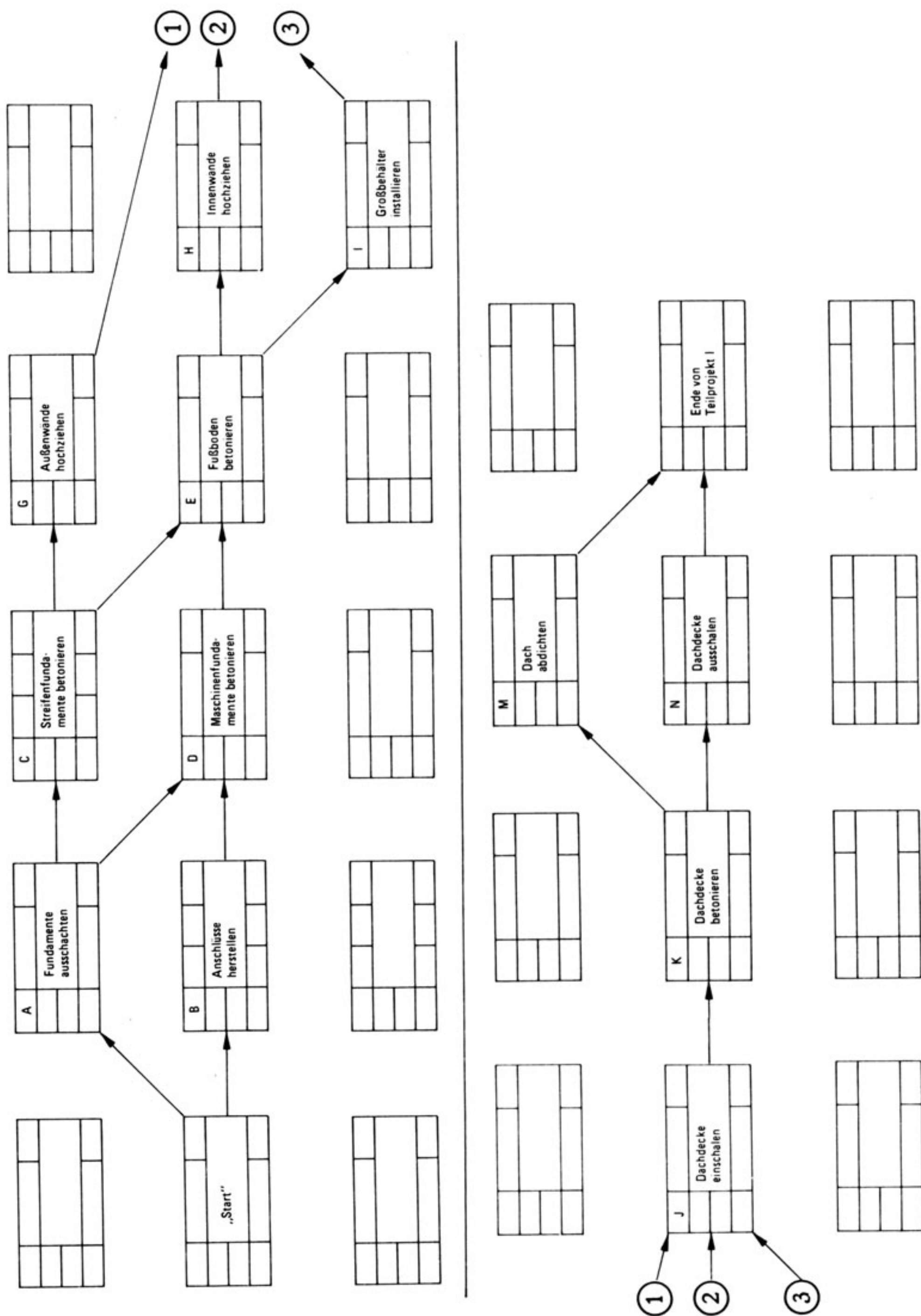


Abb. 13: Entwurfsbogen mit Vorgangsknotennetz für Teilprojekt I des Projektbeispiels (Tabelle 86, S. 166)

Als Vorteil der Vorgangspfeilnetze wird angeführt, daß der Pfeil eine anschaulichere Abbildung der Zeit beanspruchenden Abwicklung eines Vorgangs erlaubt.

C. Numerierung der Knoten

Die *Knoten* bzw. Ereignisse sind in den CPM-Netzplänen (mit natürlichen) Zahlen zu *numerieren.* Bei der Numerierung darf keine Zahl doppelt vorkommen, d.h. alle Knoten müssen verschiedene Zahlen zugewiesen bekommen. Einige Methoden der Knotennumerierung sollen kurz vorgeführt werden.

1. Willkürliche Numerierung

Den *Knoten* werden *beliebige Zahlen zugeordnet.* Dabei kann eine Zahl nur einmal vergeben werden. Diese Möglichkeit der Numerierung ist sehr einfach, aber unsystematisch; sie bietet wenig Kontrollmöglichkeiten.

2. Aufsteigende (systematische) Numerierung

Bei der *aufsteigenden (systematischen) Numerierung* erhält das *Anfangsereignis* jedes Vorgangs eine *niedrigere* Zahl zugeordnet als das Endereignis. Bezeichnet man – wie allgemein üblich – die Nummer des Anfangsereignisses eines Vorgangs mit i und die Nummer des Endereignisses mit j, so gilt $i < j$.

3. Lückenlos aufsteigende Numerierung

Sie verlangt über die aufsteigende Numerierung hinaus, daß mit der Zahl „1“ beginnend, gerade soviel *fortlaufende* natürliche Zahlen (lückenlos) als Knotennummern vergeben werden, wie der Netzplan Knoten hat. Bei n Knoten eines Netzplans hat das Startereignis die Nummer „1“ und das Zielereignis die Nummer „n“. Für die aufsteigende oder lückenlos aufsteigende Numerierung gibt es mehrere Verfahren.

Ein Verfahren, bei dem die lückenlos aufsteigende Numerierung im Netzplan vorgenommen wird und das auf FULKERSON zurückgeht (*Wegner, F. E. H.*, 1972, S. 8 f.), soll anhand des Beispiels (Teilprojekt I) erörtert werden (vgl. Abb. 12):

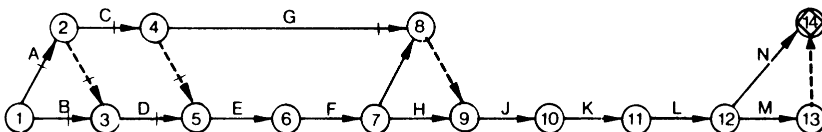


Abb. 14: Lückenlos aufsteigende Numerierung der Ereignisse von Teilprojekt I

Das Startereignis erhält Nummer „1". „Entfernt" man nun durch Durchstreichen alle Vorgänge, die vom Startereignis ausgehen, dann bleibt ein „Restnetzplan" übrig. Der „Restnetzplan", den man durch Streichen von A und B erhält, hat nun wieder ein „Startereignis". Dieses neue „Startereignis" erhält die nächstfolgende Knotennummer, also „2". Jetzt werden alle Vorgänge, die von Knoten 2 ausgehen, gestrichen (C und Scheinvorgang). Es ergeben sich für den neuen „Restnetzplan" zwei Ereignisse, von denen nur Vorgänge abgehen (Abb. 14). Die beiden nächstfolgenden Nummern „3" und „4" können beliebig für diese beiden neuen „Startereignisse" gewählt werden.
Als nächstes wären wieder die von Ereignis 3 und 4 ausgehenden Vorgänge zu streichen und das neue „Startereignis" des neuen „Restnetzplanes" zu bestimmen (im Beispiel 5) usw. bis das Zielereignis erreicht ist.
Dieses Numerierungsverfahren der Knoten des Netzplans hat u.a. den wesentlichen Vorteil, daß es eine sichere Kontrolle darüber enthält, ob Schleifen bzw. Zyklen im Netzplan enthalten sind.
Durch die Numerierung der Knoten des Netzplans ist es möglich, jeden Vorgang durch das geordnete Zahlenpaar „i, j" (Nummer des Anfangs- und Endereignisses des Vorgangs) zu kennzeichnen. Allgemein spricht man vom Vorgang „(i, j)" und meint damit den Vorgang der in i beginnt und in j endet.
Ohne Probleme kann der Algorithmus zur Numerierung der Knoten auch auf PERT- und MPM-Netzpläne übertragen werden.

IV. Zeitplanung

Bei der *Zeit- oder Terminplanung* eines Projektes geht es vor allem um die Beantwortung folgender Fragen:

(1) In welcher Zeit ist das Projekt realisierbar – ***minimale Projektdauer*** – (oder: kann für die Fertigstellung des Projektes ein vorgegebener Termin eingehalten werden)?

(2) Im Netzplan existieren Vorgänge (bzw. Wege), die parallel, also gleichzeitig, durchgeführt werden können. Diese parallelen Vorgänge (bzw. Wege) müssen nun aber nicht die gleiche Ausführungsdauer haben. Dann hängt aber auch die minimale Projektdauer nicht von allen Vorgängen (bzw. Wegen) ab. Die zweite Frage lautet: Von welchen Vorgängen hängt die minimale Projektdauer ab, und zu welchen Zeitpunkten müssen diese bei der errechneten oder vorgegebenen Projektdauer beginnen? Dies ist zugleich die Frage nach dem ***kritischen Weg durch einen Netzplan*** (Hiervon leitet sich auch die Bezeichnung „CPM" ab.). Als kritischen Weg durch einen Netzplan bezeichnet man diejenige Folge von Vorgängen, von denen die minimale Projektdauer abhängt (***kritische Vorgänge***). Nicht immer gibt es nur einen kritischen Weg in einem Netzplan.

(3) Alle Vorgänge im Netzplan, die nicht auf einem kritischen Weg liegen, sind in ihrer Durchführung nicht streng termingebunden. Sie können zeitlich verschoben oder ihre Ausführungsdauer ausgedehnt werden, ohne daß dadurch die er-

rechnete oder vorgegebene minimale Projektdauer tangiert wird. Die dritte Frage lautet: Welche Vorgänge sind nicht streng termingebunden (*nichtkritische Vorgänge*), sondern können zeitlich verschoben oder ausgedehnt werden und wie weit? (Frage nach den *Pufferzeiten*).

Für die Beantwortung dieser und weiterer Fragen ist es notwendig, zunächst die für die einzelnen Vorgänge erforderlichen Ausführungszeiten zu ermitteln. Der eigentlichen Zeitplanung muß also eine *Zeitanalyse* vorausgehen. Durch die Zeitanalyse mit Zuordnung von Ausführungszeiten zu den Vorgängen erfolgt (graphentheoretisch) eine *Bewertung* des Netzplanes (Graphen).

A. Zeitanalyse

Die *Ermittlung bzw. Schätzung der Vorgangsdauern* ist ein schwieriges Problem. Für jeden Vorgang wird eine Dauer bestimmt, die gemessen, geschätzt oder auf Grund vorhandener Erfahrungen als realistisch vorgegeben wird. Bei Fremdleistungen können verbindliche Zusagen über Liefer- oder Ausführungszeiten von Vorgängen durch Dritte vorliegen, die dann als Vorgangsdauern verwendet werden können. Da die Brauchbarkeit der Ergebnisse aus der Zeitplanung in hohem Maße von der Qualität der Eingabedaten abhängt, kommt der Zeitanalyse eine große Bedeutung zu.
Bei der Ermittlung der Vorgangsdauern sollte auf das Wissen und die Erfahrungen der mit der Projektdurchführung betrauten Mitarbeiter zurückgegriffen werden. Dabei ist aber insofern Vorsicht geboten, als von dieser Seite her oft zu großzügige Schätzungen erfolgen. Die Betroffenen wollen sich auf diese Weise eine *Zeitreserve* verschaffen (*Wille, H..*, u.a., 1972, S. 64). Es herrscht daher weitgehend Übereinstimmung, daß innerhalb eines Unternehmens die Abteilung Arbeitsvorbereitung für die Zeitermittlung mit heranzuziehen ist.
Die Vorgangsdauer ist oft von Qualität und Umfang der eingesetzten Kapazitäten (Arbeitskräfte, Betriebsmittel) abhängig. Deshalb erfolgt z.B. oft die Schätzung des Zeitbedarfs, den *eine* Person (oder Maschine etc.) für die Ausführung des Vorgangs benötigen würde. Das Ergebnis sind dann beispielsweise „Mann-Stunden", „Maschinen-Stunden" u.ä.
Die Ermittlung von Vorgangszeiten durch Mitarbeiter führt zu subjektiven Einflüssen auf die Ergebnisse. Das *Unsicherheitsproblem* wird bei vielen Verfahren der NPT nicht berücksichtigt. Man arbeitet dann mit *einem Zeitwert* für jeden Vorgang (*Einzeitenschätzung*). CPM und MPM sowie die darauf basierenden Verfahren verwenden Einzeitenschätzungen.

Bei PERT wird berücksichtigt, daß die Ausführungsdauer eines Vorgangs (i, j) nicht eindeutig ist, sondern daß dafür eine *Wahrscheinlichkeitsverteilung* existiert. Zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeitsverteilung bedient man sich bei PERT des *Drei-Werte-Verfahrens* (*Wille, H.* u. a., 1972, S. 51 ff.):

(1) Die *wahrscheinlichste Vorgangsdauer* – ND(i, j) – ist die Zeit, die unter normalen Bedingungen für die Ausführung eines Vorgangs benötigt wird (häufigster Wert der Verteilung bei Wiederholungen).

(2) Die *pessimistische Vorgangsdauer* – PD(i, j) – ist die Zeit, die unter schlechtesten Bedingungen benötigt wird (1 % Eintrittswahrscheinlichkeit).

(3) Die *optimistische Vorgangsdauer* – OD(i, j) – ist die kürzestmögliche Ausführungszeit.

Aus den drei Zeitschätzwerten errechnet man nach einer aus der Betaverteilung abgeleiteten Formel für jeden Vorgang (i, j) die erwartete Zeitdauer und aus den Differenzen zwischen PD (i, j) und OD (i, j) Varianzen der erwarteten Vorgangszeiten:

Ausführungsdauer eines Vorgangs (i, j) (Erwartungswert bzw. arithmetisches Mittel):

$$ED(i,j) = \frac{OD(i,j) + 4\ ND(i,j) + PD(i,j)}{6}$$

Varianz der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausführungsdauer eines Vorgangs (i, j) (Streuungsmaß):

$$VAR\ D(i,j) = \left(\frac{PD(i,j) - OD(i,j)}{6}\right)^2$$

Die Beziehungen zwischen ED(i, j) bzw. VARD(i, j) und OD(i, j), ND(i, j), PD(i, j) ergeben sich aus den Eigenschaften der unterstellten Betaverteilung; diese Verteilung ist als die am besten geeignete für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Vorgangsdauern ausgewählt worden. Dabei muß festgestellt werden, daß bisher weder ein empirischer Nachweis dieser Verteilungsfunktion gelungen ist, noch eine theoretische Ableitung hierfür erfolgte. Daher wurde versucht, durch möglichst genaue Beschreibung der besonderen Eigenschaften der Vorgangsdauerverteilung eine adäquate bekannte Funktion zu finden. Zum einen ist jede Vorgangsdauer zunächst dadurch beschrieben, daß sie keine negativen Werte annehmen kann und mithin die Verteilungsfunktion nur für ein abgeschlossenes, nichtnegatives Intervall erklärt sein darf. Zum anderen wird unterstellt, daß Vorgangsdauern nur um einen Wert (ND(i,j)) streuen, die Wahrscheinlichkeitsverteilung also eingipflig ist. Drittens ist für die Zeit (als einem stetigen Merkmal) von einer stetigen Verteilung auszugehen (*Bergen, R.*, *Bubolz, P.*, 1974, S. 92 f.).

Schließlich lassen sich – bei Unterstellung einer Normalverteilung für die Termine der Ereignisse – Wahrscheinlichkeiten für das Einhalten vorgegebener Termine berechnen (vgl. *Wille, H.* u. a., 1972, S. 51 ff.; *Al-Ani, A.*, 1971, S. 22 ff.; *Dathe, H. M.*, 1971, S. 144; *Bergen, R., Bubolz, P.*, 1974, S. 92 ff.; *Runzheimer, B.*, 1978, S. 59 ff.; *Wegner, F.E.H.*, 1972, S. 39 ff., *Hässig, K.*, 1979, S. 45 ff.).

Diese *Mehrzeitenschätzung* erfordert naturgemäß einen größeren Aufwand als die Einzeitenschätzung. Diese Schätzwerte des *Drei-Werte-Verfahrens* müssen jedoch nicht notwendig den Werten entsprechen, mit denen sie nach den wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen übereinstimmen sollten. Das Unsicherheitsproblem wird durch die Mehrzeitenschätzung nicht ausgeschaltet, wohl aber offengelegt.

B. Zeitplanung mit CPM

Sind die für die Zeitplanung erforderlichen Daten verfügbar, kann die Zeitberechnung beginnen.

1. Ermittlung des kritischen Weges

Da ein Projekt erst dann abgeschlossen ist, wenn alle Vorgänge realisiert sind, wird die minimale *Projektdauer* durch den *zeitlich gesehen längsten Weg durch den Netzplan (= kritischer Weg)* bestimmt. Dabei wird nicht jeder Weg im einzelnen betrachtet, denn bei großen Projekten gibt es so viele Wege, daß man auch beim Einsatz von EDV nicht sämtliche Wege vom Startereignis bis zum Zielereignis durchlaufen und jeweils die Weglänge (Gesamtdauer) berechnen kann. Man hat daher ein zweckmäßigeres Verfahren entwickelt, bei dem man für jeden *Vorgang* (i, j) seinen *frühestmöglichen Anfang* FA (i, j) sowie einen *spätestzulässigen Anfang* SA (i, j), sein *spätestzulässiges Ende* SE (i, j) und sein *frühestmögliches Ende* FE (i, j) berechnet. Zugleich ergibt sich für *jedes Ereignis (j) der frühestmögliche Zeitpunkt seines Eintretens* (kurz: frühester Ereignis-Zeitpunkt) FZ(j) und der *spätestzulässige Zeitpunkt seines Eintretens* (kurz: spätester Ereignis-Zeitpunkt) SZ(j).
Wird die *Dauer eines Vorgangs* (i, j) mit D(i, j) bezeichnet, so lassen sich FA(i, j) bzw. FZ(j) und damit die minimale Projektdauer formal nach der folgenden Rekursionsbeziehung – die sich auch unter Anwendung der dynamischen Planungsrechnung herleiten läßt (vgl. *Gaede, K.-W., Heinhold, J.*, 1976, S. 15 f.; *Wasielewski, E. v.*, 1975, S. 67 ff.) – errechnen (*Vorwärtsrechung*):

$$FZ(1) = 0$$

$$FZ(j) = \max_{i} \left[FZ(i) + D(i,j)\right] \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1 \quad j = 2, 3, \ldots, n$$

Als Projektbeginn FZ(1) wird üblicherweise der Zeitpunkt 0 vorgegeben. Man kann aber auch jeden beliebigen anderen Wert wählen. Bei *lückenlos aufsteigender Numerierung der Ereignisse* erfolgt die Bestimmung des *frühestmöglichen Ereignis-Zeitpunktes* FZ(j) wie folgt:

(1) Man bestimmt alle Vorgänge (i, j), die in Ereignis (j) einmünden.

(2) Für jeden einmündenden Vorgang wird das frühestmögliche Ende FE(i,j) berechnet: FE(i,j) = FA(i,j) + D(i,j).
Der frühestmögliche Anfang des Vorgangs (i,j) stimmt mit dem frühestmöglichen Ereignis-Zeitpunkt des Ereignisses (i) – des Anfangsereignisses – überein: FA(i,j) = FZ(i).
Mithin gilt auch: FE(i,j) = FZ(i,j) + D(i,j).
Um die Berechnungen im Netzplan übersichtlich zu halten, können die FE(i,j) an den Pfeilspitzen im Netzplan vermerkt werden (vgl. Abb. 16).

(3) Von den unter (2) bestimmten FE(i,j) aller einmündenden Vorgänge ist der größte Wert der gesuchte frühestе Ereignis-Zeitpunkt FZ(j) für das Ereignis (j). Das ergibt sich daraus, daß ein Ereignis erst eintritt, wenn *alle* einmündenden Vorgänge abgeschlossen sind.

Der früheste Ereignis-Zeitpunkt für das Zielereignis FZ(n) entspricht für den gegebenen Netzplan der *minimalen Projektdauer.*
Solange Netzpläne manuell bearbeitet werden, erfolgen die Berechnungen am Netz. Deshalb werden an jeden Pfeil die entsprechenden Vorgangsdauern D(i,j) und in jeden Knoten die Ereigniszeitpunkte geschrieben. Dazu werden die Knoten entsprechend unterteilt:

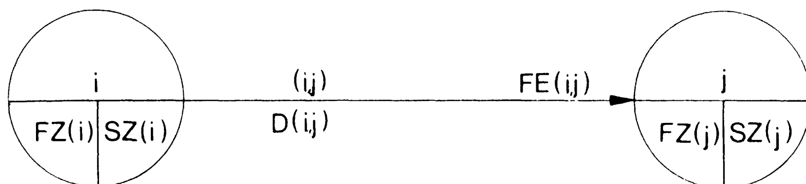


Abb. 15: Angaben im Netzplan bei manueller Bearbeitung

Für das Teilprojekt I des Projektbeispiels (vgl. Abb. 14, S. 173 und Tabelle 86) ergeben sich durch *Vorwärtsrechnung* folgende Zeitwerte:

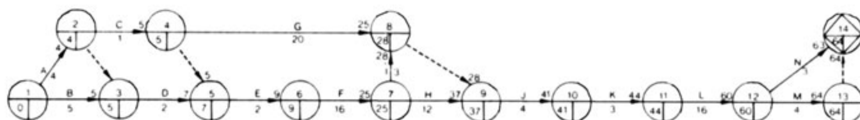


Abb. 16: Bestimmung der frühesten Ereignis-Zeitpunkte

Mit der unter den gegebenen Voraussetzungen errechneten ***minimalen Projektdauer*** FZ(14) von 64 Arbeitstagen für das Teilprojekt I (Rohbauerstellung) liegt eine erste wichtige Information für die Zeitplanung vor. Ist die ***erwünschte Projektdauer*** kürzer als die ***errechnete***, sind sicherlich Anpassungen erforderlich. Im umgekehrten Fall kann eventuell durch Verlängerung dieses Projektes die Beseitigung einer Engpaßsituation bei anderen Vorhaben erreicht werden. Dies alles sind Betrachtungen über die höchstens zulässige Projektdauer bzw. über den spätestzulässigen Zeitpunkt des Zielereignisses. Hat man über diesen Zeitpunkt keine Vorgabe, dann wird man in der Regel das Projekt in der kürzestmöglichen Zeit realisieren wollen. Das bedeutet, daß der spätestzulässige Zeitpunkt des Zielereignisses SZ(n) mit dem frühestmöglichen Zeitpunkt des Zielereignisses FZ(n) gleichgesetzt wird – FZ(n) = SZ(n) –.
Hiernach sind für alle übrigen Ereignisse (i) innerhalb des Netzplanes die spätestzulässigen Ereignis-Zeitpunkte SZ(i) zu bestimmen. Dies ist gleichbedeutend mit der Beantwortung der Frage: Wann muß das Ereignis (i) spätestens eingetreten sein, wenn bei planmäßiger Projektdurchführung die errechnete (oder vorgegebene) minimale Projektdauer eingehalten werden soll? Dabei ist zu beachten: Ein Vorgang (i,j) kann erst dann beginnen, wenn sein Anfangsereignis eingetreten ist.
Diese Berechnung entspricht derjenigen bei der Ermittlung der frühestmöglichen Ereigniszeitpunkte mit dem Unterschied, daß nunmehr vom Zielereignis ausgehend die Berechnungen rückwärts im Netzplan erfolgen (*Rückwärtsrechnung*).
Denn ein beliebiges Ereignis tritt nur dann so spät wie möglich ein, sofern sämtliche ihm unmittelbar und mittelbar vorangehenden Vorgänge zum spätestzulässigen Zeitpunkt realisiert werden. Formal ergeben sich die wiederum rekursiven Beziehungen:

$$SZ(n) = FZ(n)$$

$$SZ(i) = \min_{j} [SZ(j) - D(i, j)] \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1 \quad j = 2, 3, \ldots, n$$

Hat man die Ereignisse lückenlos aufsteigend numeriert und den spätestzulässigen Zeitpunkt für das Eintreten des Zielereignisses vorgegeben, so erfolgt die Bestimmung des *spätestzulässigen Ereignis-Zeitpunktes SZ(i)* wie folgt:

(1) Es werden alle Vorgänge (i, j) bestimmt, die von dem Ereignis (i) abgehen.

(2) Für jeden abgehenden Vorgang wird der spätestzulässige Anfang SA(i, j) berechnet:

$$SA(i, j) = SE(i,j) - D(i, j)$$

Das spätestzulässige Ende des Vorgangs (i, j) stimmt mit dem spätestzulässigen Zeitpunkt für das Endereignis dieses Vorgangs SZ(j) überein:

$$SE(i, j) = SZ(j)$$

Mithin gilt auch:

$$SA(i, j) = SZ(j) - D(i, j)$$

Um die Berechnungen im Netzplan übersichtlich zu halten, können die SA(i,j) an den Pfeilschäften im Netzplan vermerkt werden (vgl. Abb. 17, S. 180).

(3) Von den unter (2) bestimmten Werten SA(i, j) aller abgehenden Vorgänge ist der kleinste der gesuchte spätestzulässige Ereignis-Zeitpunkt SZ(i) für das Ereignis (i). Das ergibt sich daraus, daß ein Vorgang erst dann beginnen kann, wenn sein Anfangsereignis eingetreten ist.

Für das Projekt (vgl. Tabelle 86 und Abb. 12) ergeben sich folgende Ereigniszeitpunkte: *(s. Abb. 17 nächste Seite)*

Die Berechnung der spätestzulässigen Ereigniszeitpunkte beginnt mit dem Zielereignis und richtet sich in der Reihenfolge nach abnehmenden Ereignisnummern. Es ist zu beachten, daß mit der Ermittlung der Ereigniszeitpunkte im Netzplan gleichzeitig auch die für die Vorgänge zu bestimmenden Zeitpunkte berechnet wurden.
Vergleicht man die frühestmöglichen und die spätestzulässigen Ereignis-Zeitpunkte, so stellt man fest, daß außer für das Start- und Zielereignis auch noch für weitere Ereignisse hier Übereinstimmung besteht. Diese *Ereignisse* müssen also zu *genau festgelegten Zeitpunkten eintreten (kritische Ereignisse).* Sie sind „kritisch" in dem Sinne, daß jede Überschreitung des errechneten Zeitpunktes zu einer Verlängerung der minimalen Projektdauer führt. Bei einigen anderen Ereignissen (in realistischen Projekten sind es die meisten) stimmen FZ(j) und SZ(j) nicht überein, d.h. die Eintrittszeitpunkte sind hier verschieden. Der *Zeitpunkt* für das *Eintreten* dieser *Ereignisse* ist dann *nicht genau festgelegt.* Er kann mit FZ(j) oder mit SZ(j) übereinstimmen oder irgendwo dazwischen liegen. Die *Differenz* zwischen spätestzulässigem und frühestmöglichem Zeitpunkt für den Eintritt eines Ereignisses gibt den *zeitlichen Spielraum* an, in dem dieses Ereignis eintreten muß, wenn die geplante minimale Projektdauer eingehalten werden soll. Diese Differenz wird *gesamte Pufferzeit eines Ereignisses* GPE(j) genannt:

$$GPE(j) = SZ(j) - FZ(j) \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

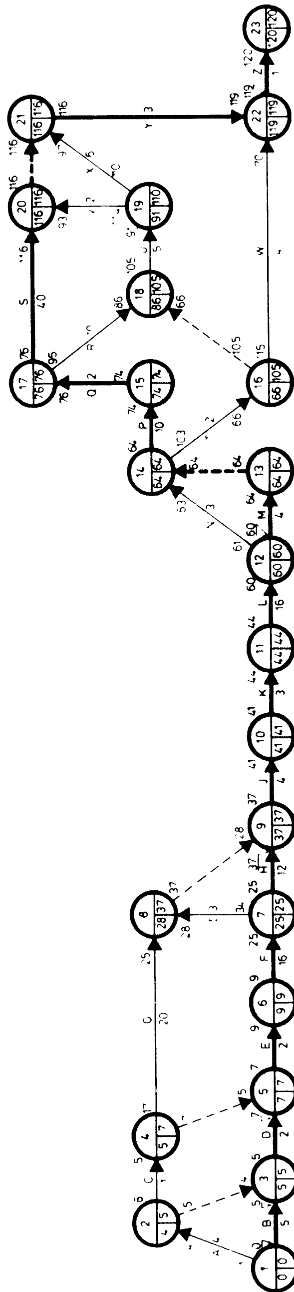


Abb. 17: Bestimmung der Ereigniszeitpunkte für das Projektbeispiel

Je geringer diese Differenz ist, um so mehr Bedeutung kommt dem entsprechenden Ereignis im Rahmen der Projektüberwachung zu. Bei *kritischen Ereignissen* ist der gesamte Ereignispuffer GPE(j) = 0.
Im Beispiel von Abb. 17 wurde das Zielereignis dadurch kritisch gemacht, daß der Zeitpunkt für das frühestmögliche Eintreten mit dem für das spätestzulässige Eintreten gleichgesetzt wurde – FZ(n) = SZ(n) –.
Nach diesem üblichen Vorgehen muß daher in dem Netzplan eine *Folge* (oder auch mehrere Folgen) von *kritischen Ereignissen* entstehen. In dem verwendeten Beispiel gehören 17 Ereignisse zu dieser Folge: 1, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 20, 21, 22, 23.
Da CPM eine vorgangsorientierte Methode ist, interessiert man sich vor allem für die *Vorgänge*. Für jeden Vorgang möchte man wissen, wann er frühestens beginnen bzw. enden kann und wann er spätestens beginnen bzw. enden muß. Insbesondere werden auch die *kritischen Vorgänge* innerhalb eines *Projektes* bestimmt. Notwendige Bedingung für einen kritischen Vorgang ist, daß sowohl sein Anfangs- als auch sein Endergebnis kritisch sind. Hinreichende Bedingung ist jedoch erst, wenn auch die Differenz zwischen den Zeitpunkten des Eintretens von End- und Anfangsereignis gleich der Dauer des entsprechenden Vorgangs ist. Für den kritischen Vorgang gilt also:

$$FZ(j) - FZ(i) = D(i, j)$$

$$FZ(j) = SZ(j); \quad FZ(i) = SZ(i)$$

(Diese Definition gilt auch für die Scheinvorgänge.)

Wie für die Ereignisse, so muß es in jedem Netzplan auch mindestens eine *Folge* von *kritischen Vorgängen* geben (Verbindung von Start- und Zielereignis). Diese Folge wird *kritischer Weg* genannt. Sie stellt den *zeitlich längsten* Weg im Netz dar und *bestimmt* damit die *minimale Projektdauer*.
In dem Beispiel (Abb. 17, S. 180) ist der kritische Weg durch stark ausgezogene Pfeile besonders hervorgehoben.
Da der kritische Weg die Projektdauer bestimmt, eine Verzögerung bei kritischen Vorgängen sich unmittelbar in einer Verlängerung der Projektdauer niederschlägt – sofern nicht eine anderweitige Beschleunigung von kritischen Vorgängen diesen Zeitverlust kompensiert –, muß dem kritischen Weg bei der Projektrealisierung besondere Bedeutung zukommen. Den kritischen Vorgängen ist daher auch im Rahmen der *Kapazitätsplanung* – zumal wenn bei Engpaßfaktoren Prioritäten zu setzen sind – besondere Aufmerksamkeit zu schenken. Voraussetzung dafür ist allerdings die Kenntnis des kritischen Weges. Das Problem der *Zeit-Kostenplanung* deutet sich hier an. Eine Beschleunigung der Projektrealisierung läßt sich im allgemeinen nur mit erhöhten („Beschleunigungs-")Kosten erreichen (*Schwarze, J.*, 1979, S. 161 ff.; *Gewald, K.* u. a., 1972, S. 33 ff.).
Berechnet man die Ereigniszeitpunkte im Netzplan und trägt die Zwischenrechnungen in der angegebenen Form an der Pfeilspitze bzw. am Pfeilschaft ein, so können die *Vorgangszeitpunkte* wie folgt aus dem Netzplan abgelesen werden:

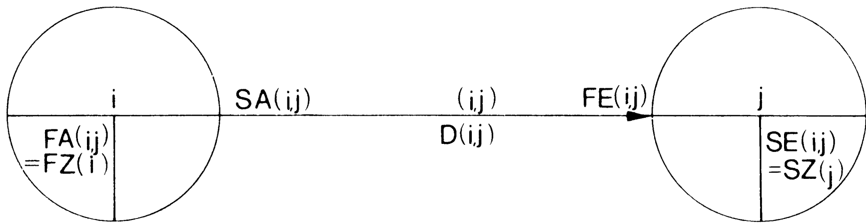


Abb. 18: Vorgangszeitpunkte im Netzplan

Es bestehen nämlich folgende Beziehungen:

$$FA(i,j) = FZ(i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1; \quad j = 2, 3, \ldots, n)$$

$$FE(i,j) = FZ(i) + D(i,j)$$

$$SA(i,j) = SZ(j) - D(i,j)$$

$$SE(i,j) = SZ(j)$$

Gesonderte Berechnungen entfallen damit.
Die Differenz zwischen spätestzulässigem Ende SE(i,j) und dem frühestmöglichen Anfang eines Vorgangs FA(i,j) ist die Zeit, die für die Durchführung eines Vorgangs (i,j) maximal zur Verfügung steht:

$$MZ(i,j) = SE(i,j) - FA(i,j) = SZ(j) - FZ(i)$$

Für kritische Vorgänge ist MZ(i,j) = D(i,j), d.h. die ***maximal verfügbare Ausführungszeit*** entspricht der Vorgangsdauer (gem. Vorgangsliste). Die Kenntnis von MZ(i,j) kann von Bedeutung sein, wenn man aus irgendwelchen Gründen die Ausführungsdauer eines Vorgangs ausdehnen will. Soll die minimale Projektdauer eingehalten werden, dann kann die Ausführungsdauer maximal bis MZ(i,j) ausgedehnt werden.

2. Ermittlung und Interpretation der Pufferzeiten

Bei den *nichtkritischen Vorgängen* steht ein *zeitlicher Spielraum* zur Verfügung, um den die Vorgänge hinsichtlich Anfang und Ende verschoben werden können oder um den ihre Ausführungsdauer ausgedehnt werden kann, ohne daß die minimale Projektdauer tangiert wird. Diesen zeitlichen Spielraum nennt man *Puffer* bzw. *Pufferzeit* (oder auch *Schlupf*). Ein Vorgang besitzt immer dann einen Puffer, wenn $MZ(i,j) > D(i,j)$.
In der NPT werden im wesentlichen vier verschiedene Arten von Puffer unterschieden (*Bergen, R., Bubolz, P.*, 1974, S. 59 ff.):
(1) Gesamte Pufferzeit eines Vorgangs GP(i,j)

$$\begin{aligned} GP(i,j) &= MZ(i,j) - D(i,j) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1; \quad j = 2, 3, \ldots, n) \\ &= SE(i,j) - FE(i,j) \\ &= SZ(j) - FE(i,j) \\ &= SA(i,j) - FA(i,j) \\ &= SZ(j) - D(i,j) - FZ(i) \end{aligned}$$

Diese Größe gibt die Zeitspanne an, die für die Verschiebung oder Ausdehnung des Vorgangs maximal verfügbar ist, ohne daß der minimale Projektabschluß beeinträchtigt wird. Rein rechnerisch besitzt jeder nichtkritische Vorgang einen gesamten Puffer. Liegen mehrere nichtkritische Vorgänge hintereinander, dann sind die „gesamten Pufferzeiten“ der auf diesem nichtkritischen Teilweg liegenden Vorgänge *nicht* mehr *unabhängig voneinander.* (Eine Folge von Vorgängen wird dann *Teilweg* genannt, wenn mit Ausnahme des zugehörigen Anfangs- und Endereignisses in jedem seiner übrigen Ereignisse nur jeweils ein Vorgang beginnt bzw. endet.) Der gesamte Puffer kann auf diesem nichtkritischen Teilweg *nur einmal* in Anspruch genommen werden. Er ist gewissermaßen der Puffer des jeweiligen nichtkritischen Teilweges. Wird bei einem Vorgang die gesamte Pufferzeit verbraucht, dann entsteht dadurch ein neuer kritischer Weg. Man betrachtet daher die gesamte Pufferzeit besser als einem Teilweg zugehörig, anstatt sie einzelnen Vorgängen zuzuordnen.

(2) Freie Pufferzeit eines Vorgangs FP(i,j)

$$\begin{aligned} FP(i,j) &= FZ(j) - FE(i,j) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1;\ j = 2, 3, \ldots, n) \\ &= FZ(j) - D(i,j) - FZ(i) \\ &= GP(i,j) - GPE(j) \end{aligned}$$

Eine freie Pufferzeit eines Vorgangs kann nur auftreten, wenn in das Endergebnis des Vorgangs noch andere Vorgänge einmünden und FZ(j) nicht durch den betrachteten Vorgang bestimmt wird. Betrachtet man nur die in ein gemeinsames Endereignis einmündenden Teilwege, so bedeuten unterschiedliche gesamte Pufferzeiten auf den Teilwegen, daß für die Realisierung der Vorgänge auf einem Teilweg mit größerer gesamter Pufferzeit mehr Zeit zur Verfügung steht als auf einem Teilweg mit geringerer gesamter Pufferzeit. Wird diese mehr verfügbare Zeit beansprucht, so beeinträchtigt das nicht das Eintreffen des Endereignisses dieses Teilweges zum frühestmöglichen Zeitpunkt und auch nicht die gesamte Pufferzeit der anderen Teilwege. Das besagt, daß der zeitliche Ablauf aller nachfolgenden Vorgänge in keiner Weise beeinflußt wird, wenn die freie Pufferzeit durch Ausdehnung der Vorgangsdauer oder durch Verzögerung der Ausführung verbraucht wird. Darin liegt die Bedeutung des freien Puffers. Er kann in Anspruch genommen werden, ohne daß dadurch die FA(i,j) der nachfolgenden Vorgänge verschoben werden, und damit die Zeitplanung des restlichen Projektes tangiert wird. Obwohl auch die freie Pufferzeit sämtlichen Vorgängen des entsprechenden Teilweges zur Verfügung steht, teilt die Berechnung sie nur einzelnen Vorgängen zu, und zwar nur dem letzten Vorgang des Teilweges.

(3) Unabhängige Pufferzeit eines Vorgangs UP(i,j)

Es liegt nahe, auch eine Pufferzeit für einen Vorgang zu definieren, die auch unabhängig davon ist, zu welchem Zeitpunkt die Vorgänger dieses Vorgangs begonnen werden. Die unabhängige Pufferzeit tritt immer dann auf, wenn die Differenz zwischen frühestmöglichem Eintreten des Endereignisses FZ(j) und spätestzulässigem Eintreten des Anfangsereignisses SZ(i) größer als die Dauer des Vorgangs D(i,j) ist.

$$UP(i,j) = \max \begin{cases} 0 \\ FZ(j) - SZ(i) - D(i,j) \end{cases}$$

$(i = 1, 2, \ldots, n - 1;\ j = 2, 3, \ldots, n)$

Die Bestimmungsgleichung für UP(i,j) bedeutet, daß UP(i,j) = 0 ist, falls FZ(j) – SZ(i) – D(i,j) $\leqslant$ 0; sonst ist UP(i,j) = FZ(j) – SZ(i) – D(i,j).

Die Differenz FZ(j) – SZ(i) – D(i,j) kann also durchaus negativ sein, nur existiert dann keine unabhängige Pufferzeit (UP(i,j) = 0).

Die unabhängige Pufferzeit ist die Zeitdauer, um den ein Vorgang auch dann noch ausgedehnt oder verschoben werden kann, wenn alle Vorgänger zum spätestzulässigen Zeitpunkt beendet werden und alle Nachfolger frühestmöglich beginnen. Durch seine Inanspruchnahme bleibt der übrige Zeitplan unberührt.

(4) Bedingte Pufferzeit eines Vorgangs BP(i,j)

Um diese Zeitspanne kann ein Vorgang ausgedehnt oder verschoben werden zu Lasten der nachfolgenden nichtkritischen Vorgänge:

$$\begin{aligned} BP(i,j) &= SZ(j) - FZ(j) \\ &= GPE(j) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n - 1;\quad j = 2, 3, \ldots, n) \end{aligned}$$

Die Summe aus freier und bedingter Pufferzeit eines Vorgangs entspricht seiner gesamten Pufferzeit:

$$GP(i,j) = FP(i,j) + BP(i,j)$$

Die Berechnung der Pufferzeiten kann in einer Tabelle erfolgen. Das Ergebnis für das Projektbeispiel (vgl. Tab. 87 und Abb. 17, S. 180) lautet (s. nächste Seite).

In eine solche Tabelle trägt man alle bereits bekannten Zeitangaben ein, also Vorgangsdauer und Ereigniszeitpunkte – Spalten (1), (2), (3), (4) und (7) –. Die Ausführungsdauern der Vorgänge werden der Zeitanalyse, die Ereigniszeitpunkte dem Netzplan (vgl. Abb. 17, S. 180) entnommen.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß die häufig vertretene Ansicht, die NPT minimiere die Projektdauer, nicht zutreffend ist. Die Zeitplanung baut nämlich auf einer festen Projektstruktur auf. Für genau diese feste Projektstruktur wird ein detaillierter Zeitplan erarbeitet. Das schließt aber nicht aus, daß es andere Ablaufstrukturen desselben Projektes gibt, die zu einer kürzeren Projektdauer führen können. Um die absolut kleinste Projektdauer zu finden, müßte man alle denkbaren Projektabläufe untersuchen. Mit der NPT kann man also immer nur eine *minimale Projektdauer für eine gegebene Projektstruktur* ermitteln.

Vorgang Kurzbezeichnung (*)	(i,j)	D(i,j) (1) (*)	SZ(i) (2) (*)	FZ(j) (3) (*)	FA(i,j) = FZ(i) (4) (*)	SA(i,j) (5) = (7)−(1)	FE(i,j) (6) = (4)+(1)	SE(i,j) = SZ(j) (7) (*)	GP(i,j) (8) = (7)−(6)	FP(i,j) (9) = (3)−(6)	UP(i,j) (10) = (3)−(2)−(1)	BP(i,j) (11) = (7)−(3)	MZ(i,j) (12) = (7)−(4)
A	(1,2)	4	0	4	0	1	4	5	1	0	0	1	5
B	(1,3)	5	0	5	0	0	5	5	kritisch	0	0	0	5
C	(2,4)	1	5	5	4	6	5	7	2	0	0	2	3
D	(3,5)	2	5	7	5	5	7	7	kritisch	0	0	0	2
E	(5,6)	2	7	9	7	7	9	9	kritisch	0	0	0	2
F	(6,7)	16	9	25	9	9	25	25	kritisch	0	0	0	16
G	(4,8)	20	7	28	5	17	25	37	12	3	1	9	32
H	(7,9)	12	25	37	25	25	37	37	kritisch	0	0	0	12
I	(7,8)	3	25	28	25	34	28	37	9	0	0	9	12
J	(9,10)	4	37	41	37	37	41	41	kritisch	0	0	0	4
K	(10,11)	3	41	44	41	41	44	44	kritisch	0	0	0	3
L	(11,12)	16	44	60	44	44	60	60	kritisch	0	0	0	16
M	(12,13)	4	60	64	60	60	64	64	kritisch	0	0	0	4
N	(12,14)	3	60	64	60	61	63	64	1	1	1	0	4
P	(14,15)	10	64	74	64	64	74	74	kritisch	0	0	0	10
Q	(15,17)	2	74	76	74	74	76	76	kritisch	0	0	0	2
R	(17,18)	10	76	86	76	95	86	105	19	0	0	19	29
S	(17,20)	40	76	116	76	76	116	116	kritisch	0	0	0	40
T	(14,16)	2	64	66	64	103	66	105	39	0	0	39	41
U	(18,19)	5	105	91	86	105	91	110	19	0	0	19	24
V	(19,20)	2	110	116	91	114	93	116	23	23	4	0	25
W	(16,22)	4	105	119	66	115	70	119	49	49	0	0	53
X	(19,21)	6	110	116	91	110	97	116	19	19	0	0	25
Y	(21,22)	3	116	119	116	116	119	119	kritisch	0	0	0	3
Z	(22,23)	1	119	120	119	119	120	120	kritisch	0	0	0	1

Tabelle 87: Ergebnis der manuellen Zeitplanung des Projektbeispiels

(*) Die Angaben dieser Spalten müssen vorab eingetragen werden

C. Zeitplanung mit Vorgangsknotennetzen

1. Grundlagen und Begriffsbestimmungen

Vorgangsknotennetze gestatten in ihrer allgemeinen Struktur die Darstellung verschiedener *Anordnungsbeziehungen* zwischen den Vorgängen. Abbildung 19 zeigt die vier zulässigen Arten von Anordnungsbeziehungen zwischen einem Vorgänger i und einem Nachfolger j:

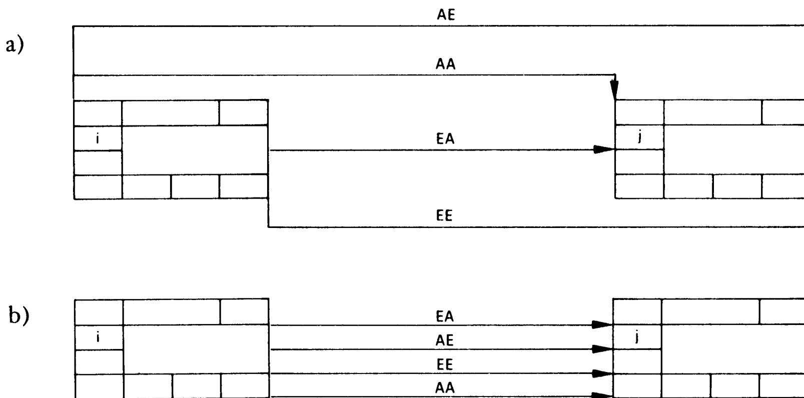


Abb. 19: zulässige Anordnungsbeziehungen bei einem Vorgangsknotennetz

Die vier zulässigen Anordnungsbeziehungen können sein:
- Ende-Anfang-Beziehung (EA)
- Anfang-Ende-Beziehung (AE)
- Ende-Ende-Beziehung (EE)
- Anfang-Anfang-Beziehung (AA)

Alle vier dargestellten Beziehungen stellen Mindestabstände zwischen dem Vorgänger i und dem Nachfolger j dar. Bei der Darstellung in Abbildung 19a repräsentieren die linke Seite des Knotenrechtecks den Vorgangsanfang und die rechte Seite des Knotenrechtecks das Vorgangsende.
In Abbildung 19b wird die weniger anschauliche Darstellungsform der vier möglichen Anordnungsbeziehungen gezeigt, die auch in der Praxis anzutreffen ist. Bei dieser Darstellungsform repräsentieren die Seiten der Knotenrechtecke keine Vorgangsereignisse. Die Art der Anordnungsbeziehungen wird hier durch die Buchstaben A und E an den Pfeilen symbolisiert.

a) Ende-Anfang-Beziehung

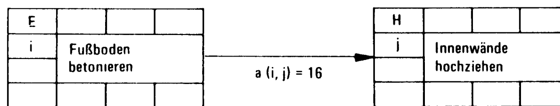
Die einfachste Beziehung zwischen Vorgängen ist die *„Ende-Anfang-Beziehung" (EA).* Ist i Vorgänger von j, so kann j erst beginnen, wenn i abgeschlossen ist. Diese Ende-Anfang-Beziehung wird (nach DIN 69900) „Normalfolge (NF)" genannt.

Diese Abhängigkeit gibt einmal die Reihenfolge der Vorgänge an, zum anderen beinhaltet sie eine Aussage hinsichtlich der zeitlichen Reihenfolge. Die übliche Ende-Anfang-Beziehung drückt einen *zeitlichen Mindestabstand* zwischen dem Ende des Vorgängers i und dem Anfang des Nachfolgers j aus. Vorgang j kann zwar erst beginnen, wenn Vorgang i beendet ist, das Ende von i muß aber nicht mit dem Anfang von j zusammenfallen; j kann demnach auch später als das Ende von i beginnen. Diese Ende-Anfang-Beziehung mit zeitlichem Mindestabstand – kurz: MINEA – ist die häufigste Anordnungsbeziehung zwischen Vorgängen. Vorgangsknotennetze, die nur Abhängigkeiten in dieser Form berücksichtigen, heißen „einfache Vorgangsknotennetze".

In einem Vorgangsknotennetz ist es nun möglich, einen zwei Knoten verbindenden Pfeil, der die Abhängigkeit der den Knoten zugeordneten Vorgänge darstellt, mit dem *zeitlichen Mindestabstand* MINEA zu bewerten. Dieser Zeitabstand a(i,j) gibt an, wieviel Zeit bei einer Abhängigkeit der Form MINEA mindestens zwischen dem Ende des Vorgängers (Vorgang i) und dem Anfang des Nachfolgers (Vorgang j) liegen muß. Die zeitlichen Abstände a(i,j) zwischen den Vorgängen i und j werden allgemein *„Potentiale"* genannt.

Soll z. B. in unserem Projektbeispiel (vgl. Tabelle 86, S. 166) auf den Vorgang „Fußboden betonieren" (i) der Vorgang „Innenwände hochziehen" (j) folgen, so kann die dazwischen notwendige „Abbindedauer des Fußbodenbetons" mit 16 Tagen Zeitbedarf durch a(i,j) = 16 berücksichtigt werden (Abb. 20a):

a) positives Potential



b) negatives Potential

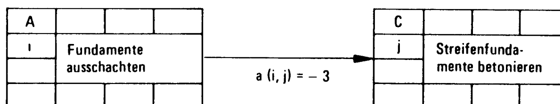


Abb. 20: Zeitabstände zwischen Vorgängen bei einem Vorgangsknotennetz mit Ende-Anfang-Beziehung

Bei einem Vorgangspfeilnetz (CPM) muß die „Abbindedauer des Fußbodenbetons" durch einen besonderen Vorgang (Pfeil F) berücksichtigt werden (vgl. Abb. 17, S. 180).

In einer Reihe von Fällen kann es sinnvoll sein, auch mit einem negativen Zeitabstand im Vorgangsknotennetz zu arbeiten (a(i,j) < 0). Soll es z. B. in unserem Projektbeispiel (vgl. Tabelle 86, S. 166) möglich sein, daß mit dem Vorgang „Streifenfundamente betonieren" (j) bereits begonnen werden kann, bevor der Vorgang „Fundamente ausschachten" (i) vollständig beendet ist, so hängt der Nachfolger „Streifenfundamente betonieren" (j) zwar von dem Ende des Vorgängers „Funda-

mente ausschachten" (i) ab, der Beginn des Vorgangs j kann aber früher liegen. Kann mit Vorgang j beispielsweise schon drei Tage vor dem Ende des Vorgängers i begonnen werden, so kann dies durch den negativen Zeitabstand a(i,j) = −3 an dem entsprechenden Pfeil kenntlich gemacht werden (vgl. Abb. 20b). Während ein positives Potential einen zeitlichen Mindestabstand (MINEA: minimale Wartezeit zwischen dem Ende des Vorgängers i und dem Anfang des Nachfolgers j) bedeutet, gibt ein negatives Potential die *maximale Überlappungszeit* der beiden aufeinanderfolgenden Vorgänge an. Die maximale Überlappungszeit ist die Zeit, in der die beiden betreffenden Vorgänge längstens (zeitlich) parallel laufen dürfen.

Ist an einem Pfeil kein Zeitabstand angegeben, so bedeutet dies formal a(i,j) = 0.

Besteht die Bedingung, daß bei zwei aufeinanderfolgenden Vorgängen zwischen dem Ende des Vorgängers i und dem Anfang des Nachfolgers j nur ein maximaler Zeitabstand liegen darf, so besagt dies, daß der Nachfolger j spätestens a(i,j) Zeiteinheiten nach dem Ende von Vorgang i beginnen muß. Dieser *zeitliche Maximalabstand* wird durch MAXEA symbolisiert und wie folgt im Netzplan durch einen *Pfeil in entgegengesetzter Richtung mit einem negativen Potential* dargestellt:

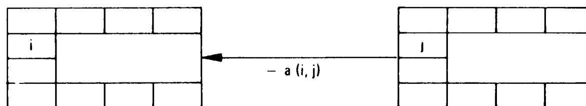


Abb. 21: Darstellung eines maximalen Zeitabstandes zwischen aufeinanderfolgenden Vorgängen bei einem Vorgangsknotennetz

In unserem Projektbeispiel müßte beispielsweise zwischen den Vorgängen „Beton für Fußboden anfahren" (i) und „Verteilen und Glätten des Fußbodenbetons" (j) ein MAXEA vorgegeben werden. Würde der vorgegebene maximale Zeitabstand zwischen dem Ende des Vorgängers i und dem Anfang des Nachfolgers j überschritten, so würde der Beton schon soweit abgehärtet sein, daß man ihn nicht mehr genügend gut verteilen und glätten könnte.

Ein maximaler zeitlicher Abstand MAXEA zwischen dem Ende des Vorgangs i und dem Anfang von Vorgang j mit dem Potential a(i,j) bedeutet, daß der früheste Anfang von Vorgang j (FA(j)) maximal a(i,j) Zeiteinheiten nach dem frühesten Ende des Vorgangs i (FE(i)) liegen darf:

$$FA(j) \leqslant FE(i) + a(i,j)$$

oder (umgeformt)

$$FE(i) \geqslant FA(j) - a(i,j)$$

Diese Bedingung entspricht also dem Minimalabstand zwischen dem Anfang von Vorgang j und dem Ende von Vorgang i mit dem zeitlichen Abstand −a(i,j). Diese Darstellungsart zeigt, daß die Maximalbedingung in eine Minimalbedingung überführt werden kann. Dadurch brauchen bei der Durchführung der Zeitplanung nur Minimalbedingungen berücksichtigt zu werden.

b) **Anfang-Ende-Beziehung**

Die *„Anfang-Ende-Beziehung"* *(AE)* wird (nach DIN 69900) „Sprungfolge (SF)" genannt. MINAE bzw. MAXAE gibt den zeitlichen Mindest- bzw. Höchst-Abstand an, der zwischen dem Anfang des Vorgängers i und dem Ende des Nachfolgers j liegt. Diese Abhängigkeit kommt selten vor, so daß Netzpläne auf der Basis der Anfang-Ende-Beziehung nicht üblich sind (*Altrogge, G.*, 1979, S. 100).

c) **Ende-Ende-Beziehung**

Die *„Ende-Ende-Beziehung"* *(EE)* beinhaltet, daß ein unmittelbar nachfolgender Vorgang j erst beendet werden kann, wenn der vorausgehende Vorgang i abgeschlossen ist. Diese Beziehung wird (nach DIN 69900) „Endfolge (EF)" genannt. Die Zeitabstände werden analog mit MINEE bzw. MAXEE symbolisiert. Die Potentiale a(i,j) können positiv, Null oder negativ sein.
Ein besonderes Vorgangsknotennetz mit Ende-Ende-Beziehung, in dem durch die Knoten die Vorgangsenden dargestellt werden, verwendet die *„Hamburger Methode der Netzplantechnik (HMN)"*, eine deutsche Entwicklung, die 1966 für den Schiffsbau erfolgte (*Häger, W., Tschiersch, H.-G.*, 1976).

d) **Anfang-Anfang-Beziehung**

Eine andere Beziehung zwischen Vorgängen ist die *„Anfang-Anfang-Beziehung"* *(AA)*. Diese Beziehung wird (nach DIN 69900) „Anfangsfolge (AF)" genannt. Die NPT-Methode *MPM* arbeitet mit dieser Anfang-Anfang-Beziehung. Aus diesem Grunde sollen die Möglichkeiten dieser Darstellungsform etwas eingehender erörtert werden. MINAA bedeutet, daß Vorgang j *frühestens* eine bestimmte Zeit a(i,j) nach dem Anfang des Vorgangs i beginnen kann. MAXAA gibt an, um wieviel Zeiteinheiten a(i,j) ein Vorgang j *spätestens* nach dem Anfang des vorangehenden Vorgangs i beginnen muß. Dabei können die Zeitabstände (die Potentiale) größer oder gleich Null sein.
Kann im obigen Projektbeispiel (Tabelle 86, S. 166) mit dem Vorgang j „Streifenfundamente betonieren" schon ein Tag nach dem Anfang des vorangehenden Vorgangs i „Fundamente ausschachten" begonnen werden, so kann MINAA im Netzplan wie folgt dargestellt werden (a(i,j) = 1):

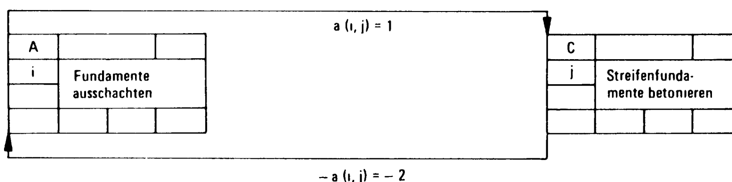


Abb. 22: Positive und negative Potentiale zwischen Vorgängen bei einem MPM-Netzplan

Soll sichergestellt werden, daß die ausgeschachteten Fundamente unverzüglich ausbetoniert werden, um zu verhindern, daß sie eventuell teilweise wieder zerstört

werden (z. B. durch Witterungseinflüsse), so müßte ein maximaler Zeitabstand MAXAA zwischen dem Anfang des Vorgangs i „Fundamente ausschachten" und dem Anfang des Vorgangs j „Streifenfundamente betonieren" festgelegt werden.
In Abb. 22 ist MAXAA mit $-a(i,j) = -2$ an dem *Pfeil in entgegengesetzter Richtung* dargestellt, d. h. der Vorgang j muß spätestens zwei Tage nach dem Anfang des Vorgängers i beginnen.
Ein spezieller Fall wird beschrieben, wenn das positive Potential a(i,j) und das negative Potential $-a(i,j)$ an einem Pfeil in entgegengesetzter Richtung absolut den gleichen Wert annehmen:

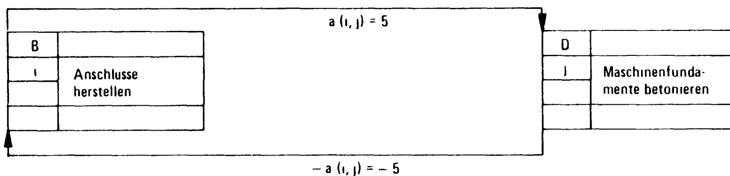


Abb. 23: Positive und negative Potentiale mit absolut gleichen Werten zwischen Vorgängen bei einem MPM-Netzplan

Dies bedeutet, daß mit dem Vorgang j unmittelbar im Anschluß an das Ende des Vorgangs i begonnen werden muß. Der Pfeil mit positivem Potential allein kann diesen Sachverhalt nicht richtig wiedergeben, da er lediglich den zeitlichen Minimal-Abstand MINAA markiert. Abgesehen von dem Tatbestand, daß sich dieser Sachverhalt stets für die kritischen Vorgänge im Netzplan ergibt, wird diese Darstellungsform immer dann nötig sein, wenn technische oder organisatorische Umstände eine derart enge Verknüpfung von Vorgängen bedingen.
Da es bei dieser zeitlichen Bedingung durchaus nicht notwendig ist, daß der Vorgang j unmittelbar Nachfolger des Vorgangs i ist, läßt sich diese Bedingung auch für andere Sachverhalte verwenden, wie beispielsweise die zeitliche Abstimmung parallel verlaufender, sich aber später vereinigender Abläufe:

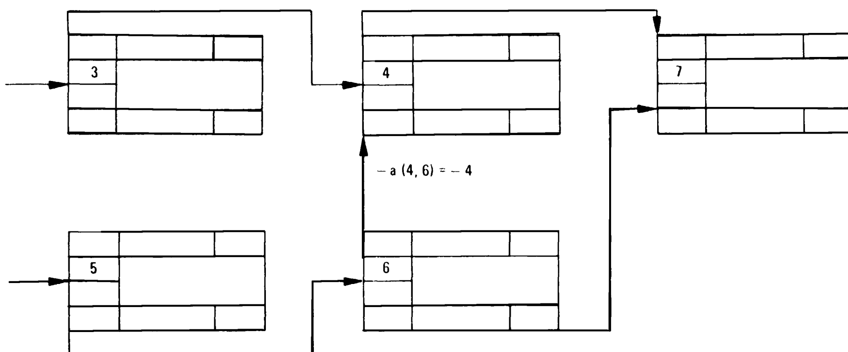


Abb. 24: Zeitliche Abstimmung parallel verlaufender Vorgänge mit Hilfe negativer Potentiale bei einem MPM-Netzplan

In dem vorstehenden Netzplanausschnitt (Abb. 24) stellt das negative Potential $-a(4,6) = -4$ an dem Pfeil zwischen den Vorgängen $i = 4$ und $j = 6$ sicher, daß der Vorgang 6 spätestens 4 Zeiteinheiten nach dem Anfang des Vorgangs 4 begonnen werden muß.
Schließlich kann bei einem Vorgangsknotennetz nach MPM eine Beziehung zwischen dem spätestzulässigen Anfang eines Vorgangs j und dem „Projektstart" hergestellt werden:

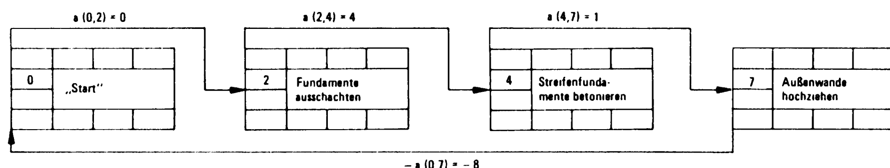


Abb. 25: Beziehung zwischen Projektstart und spätestzulässigem Anfang eines beliebigen Vorgangs

Eine solche Beziehung ist sinnvoll, wenn z. B. in unserem Projektbeispiel ein bestimmter Bautenstand vor dem Einsetzen des Winters (Frost) erreicht werden soll. So gibt das negative Potential $-a(0,7) = -8$ an dem Pfeil in entgegengesetzter Richtung an, daß der Vorgang „Außenwände hochziehen" ($j = 7$) spätestens 8 Tage nach dem Projektstart ($i = 0$) begonnen werden muß.
Bei Berücksichtigung einer solchen zeitlichen Nebenbedingung fällt auf, daß Zyklen (vgl. S. 160) in den Netzplan eingeführt werden. Dabei handelt es sich jedoch nicht um einen Widerspruch zu der allgemeinen Forderung der NPT, daß ein Netzplan zyklen- und schleifenfrei sein muß. Diese Forderung bezieht sich nämlich ausschließlich auf die *Strukturplanung.* Die Einführung derartiger zeitlicher Nebenbedingungen ist grundsätzlich zulässig; allerdings gilt dies nur insoweit, als die zeitlichen Nebenbedingungen, die zu Zyklen geführt haben, mit den übrigen Bedingungen verträglich sind. Dies ist also jeweils zu überprüfen. Die Verträglichkeit eines solchen Zyklus ist gegeben, wenn die Summe aller Potentiale an den Pfeilen, die zu einem Zyklus führen, einen nichtpositiven Wert ergibt:

$$\sum_{i,j} a(i,j) \leqslant 0 \qquad \text{(für alle (i,j), die die Pfeile im Zyklus kennzeichnen)}$$

In Abb. 25 ist die Verträglichkeit gegeben, da

$$\sum_{i,j} a(i,j) = a(0,2) + a(2,4) + a(4,7) - a(0,7) \leqslant 0$$
$$0 + 4 + 1 - 8 = -3$$

Wäre die Verträglichkeit nicht gegeben, so würde dies anzeigen, daß der entsprechende Projektausschnitt nicht realisierbar ist.

e) Kombination von Anordnungsbeziehungen

Begrifflich und zeichnerisch ist es möglich, zwischen den Vorgängen mehrere Anordnungsbeziehungen mit minimalen und maximalen Zeitabständen und Pfeilen in

beiden Richtungen zu verwenden. Voraussetzung ist jedoch, daß die Beziehungen untereinander und mit den vorgegebenen Vorgangsdauern nicht in Widerspruch geraten.

Sollen verschiedene Anordnungsbeziehungen in einem Netzplan verwendet werden, so müßte die Vorgangsliste bei jedem Vorgang um die Angabe der Art der Abhängigkeit und die zugehörigen Zeitabstände ergänzt werden. Zur Demonstration soll unser Projektbeispiel (Tab. 86, S. 166) als Ergebnis der Strukturplanung im ersten Teil erweitert werden (Tabelle 88):

Vorgang	Ausführungsdauer in Tagen	Vorgänger	Anordnungsbeziehung	Zeitabstand in Tagen
A Fundamente ausschachten	4	–		
B Anschlüsse herstellen	5	–		
C Streifenfundamente betonieren	1	A A	MINEA MAXEA	– 3 + 2
D Maschinenfundamente betonieren	2	A A B	MINAA MAXEA MINEE	+ 2 + 1 + 2
E Fußboden betonieren	2	C D	MINAA MINAA	+ 1 + 2
F Abbindedauer des Fußbodenbetons	16	E		
G Außenwände hochziehen	20	C C	MINAA MAXEA	+ 1 + 5
H Innenwände hochziehen	12	E E G	MINEA MAXEA MAXAA	+ 16 + 19 + 2
I Großbehälter installieren	3	E E	MINEA MAXEA	+ 16 + 17
J Dachdecke einschalen	4	G G H I	MINAA MAXEE MINAA MINAA	+ 20 + 26 + 12 + 3
• • •				

Tabelle 88: Vorgangsliste mit Abhängigkeitsbeziehungen, Ausführungsdauern und Zeitabständen als Ergebnis der Strukturanalyse

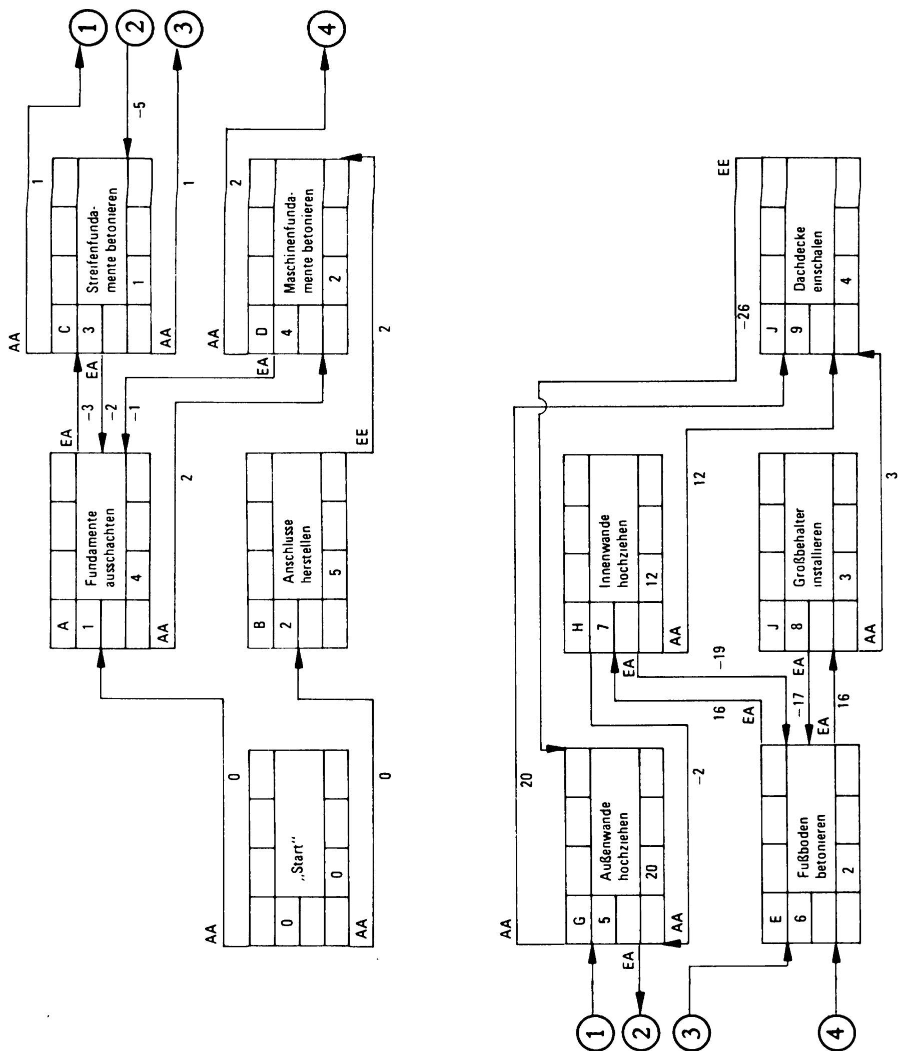
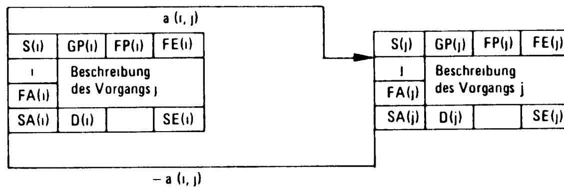


Abb. 26: Kombination von Anordnungsbeziehungen in einem Vorgangsknotennetz
(Netzplan zum Beispiel aus Tabelle 88)

2. Ermittlung der Vorgangszeitpunkte in einem MPM-Netzplan

In einem MPM-Netzplan können die Knoten die wichtigen Informationen aufnehmen, die den jeweiligen Vorgang betreffen. Die Pfeile hingegen werden nur mit den Potentialen versehen:



S(i) bzw. S(j):	Symbol für Kurzbezeichnung des Vorgangs i bzw. j (z. B. A, B, C, . . .)
i:	Nr. des vorangehenden Vorgangs
j:	Nr. des folgenden Vorgangs ($i < j$)
FA(i) bzw. FA(j):	Frühestmöglicher Anfang des Vorgangs i bzw. j
SA(i) bzw. SA(j):	Spätestzulässiger Anfang des Vorgangs i bzw. j
D(i) bzw. D(j):	Ausführungsdauer des Vorgangs i bzw. j
SE(i) bzw. SE(j):	Spätestzulässiges Ende des Vorgangs i bzw. j
FE(i) bzw. FE(j):	Frühestmögliches Ende des Vorgangs i bzw. j
a(i, j):	Positives Potential (MINAA: minimaler zeitlicher Abstand zwischen Anfang des Vorgangs i und Anfang des Vorgangs j)
– a(i, j):	Negatives Potential (MAXAA: maximaler zeitlicher Abstand zwischen Anfang des Vorgangs i und Anfang des Vorgangs j) an Pfeil in entgegengesetzter Richtung
GP(i) bzw. GP(j):	Gesamte Pufferzeit des Vorgangs i bzw. j
FP(i) bzw. FP(j):	Freie Pufferzeit des Vorgangs i bzw. j

Abb. 27: Gestaltung der Knoten mit Anfang-Anfang-Beziehung bei MPM

Die *Zeitplanung für ein Projekt* erfolgt in mehreren Schritten.

Schritt 1:

Für jeden Vorgang j des Projektes wird der *frühestmögliche Anfang* (frühestmöglicher Beginnzeitpunkt) FA(j) ermittelt. Der letzte Vorgang j = n im MPM-Netzplan ist der Scheinvorgang „Ende" des Projektes. FA(n) entspricht der *minimalen Projektdauer,* die wiederum durch den *zeitlich längsten Weg* durch den Netzplan bestimmt wird. Bleiben zunächst die Beziehungen mit negativen Potentialen unberücksichtigt, so ergeben sich die frühestmöglichen Anfangszeitpunkte im Wege der *Vorwärtsrechnung* wie folgt:

$$FA(0) = 0$$
$$FA(j) = \max_i \left[FA(i) + a(i,j)\right] \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1 \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Als Projektbeginn FA(O) wird üblicherweise der Zeitpunkt 0 vorgegeben. Man könnte aber auch jeden beliebigen anderen Wert wählen.
Um die Vergleichbarkeit mit den Ergebnissen der Zeitplanung nach CPM (vgl. Abb. 17, S. 180 und Tab. 87, S. 185) zu erreichen, wird die Vorgehensweise der Zeitplanung nach MPM an dem obigen Projektbeispiel: „Bau einer Fabrikationshalle" (vgl. Vorgangsliste in Tab. 86, S. 166) demonstriert: *(Abb. 28 siehe S. 196–197)*

In Abb. 28 sind die FA(j) jeweils an den vorgesehenen Stellen in den Knoten angegeben. Der Scheinvorgang „Ende" des Projektes wird frühestmöglich nach 120 Tagen – FA(22) = 120 – erreicht (minimale Projektdauer). Der *längste Weg durch das Projekt* wurde also mit der Dauer von 120 Tagen ermittelt. Das *frühestmögliche Ende* eines jeden Vorgangs i läßt sich leicht ermitteln:

$$FE(i) = FA(i) + D(i) \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

Die entsprechenden Werte sind ebenfalls an den vorgesehenen Stellen in den Knoten (Abb. 28) eingetragen.
Sind im Netzplan Pfeile mit entgegengesetzter Richtung und negativen Potentialen vorhanden, so ist zu überprüfen, ob diese die errechneten FA(j) und damit möglicherweise auch die ermittelte minimale Projektdauer beeinflussen. Dabei kann sich ein negatives Potential nur auf den Vorgang, in den der Pfeil mit entgegengesetzter Richtung einmündet, sowie auf die Nachfolger dieses Vorgangs auswirken; dem Vorgang vorausgehende Vorgänge bleiben unberührt (*Bergen, R., Bubolz, P.*, 1974, S. 76).

Schritt 2:

Durch *Rückwärtsrechnung* kann für jeden Vorgang der *spätestzulässige Anfang* SA(i) ermittelt werden. Geht man wieder davon aus, daß die minimale Projektdauer nicht überschritten werden soll, dann entspricht der *frühestmögliche Anfang* des Scheinvorgangs „Ende" des Projektes zugleich dem *spätestzulässigen Anfang* dieses Scheinvorgangs:

$$FA(n) = SA(n)$$

Der *spätestzulässige Anfang* eines Vorgangs i wird durch den *zeitlich längsten Weg* vom Zielvorgang n (hier: „Ende" des Projektes) bis zu dem Vorgang i bestimmt. Bleiben zunächst wieder die Beziehungen mit negativen Potentialen unberücksichtigt, dann gilt:

$$SA(n) = FA(n)$$
$$SA(i) = \min_{j} \, [SA(j) - a(i,j)]$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n-1; \qquad j = 1, 2, \ldots, n)$$

Das *spätestzulässige Ende* eines jeden Vorgangs i läßt sich wiederum leicht berechnen:

$$SE(i) = SA(i) + D(i) \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

In Abb. 28 sind die Werte für SA(i) sowie die für SE(i) jeweils an den vorgesehenen Stellen in den Knoten angegeben.
Sind im Netzplan Pfeile mit entgegengesetzter Richtung und negativen Potentialen vorhanden, so ist ihr möglicher Einfluß zu berücksichtigen. In Umkehrung der Betrachtung bei der Ermittlung der FA(j) ist hier zu beachten, daß nur der spätestzulässige Anfang eines Vorgangs beeinträchtigt werden kann, von dem der Pfeil (in entgegengesetzter Richtung) mit negativem Potential ausgeht. Darüber hinaus kann ein solcher Einfluß nur noch auf die Vorgänger dieses Vorgangs, nicht auf seine Nachfolger ausgehen.

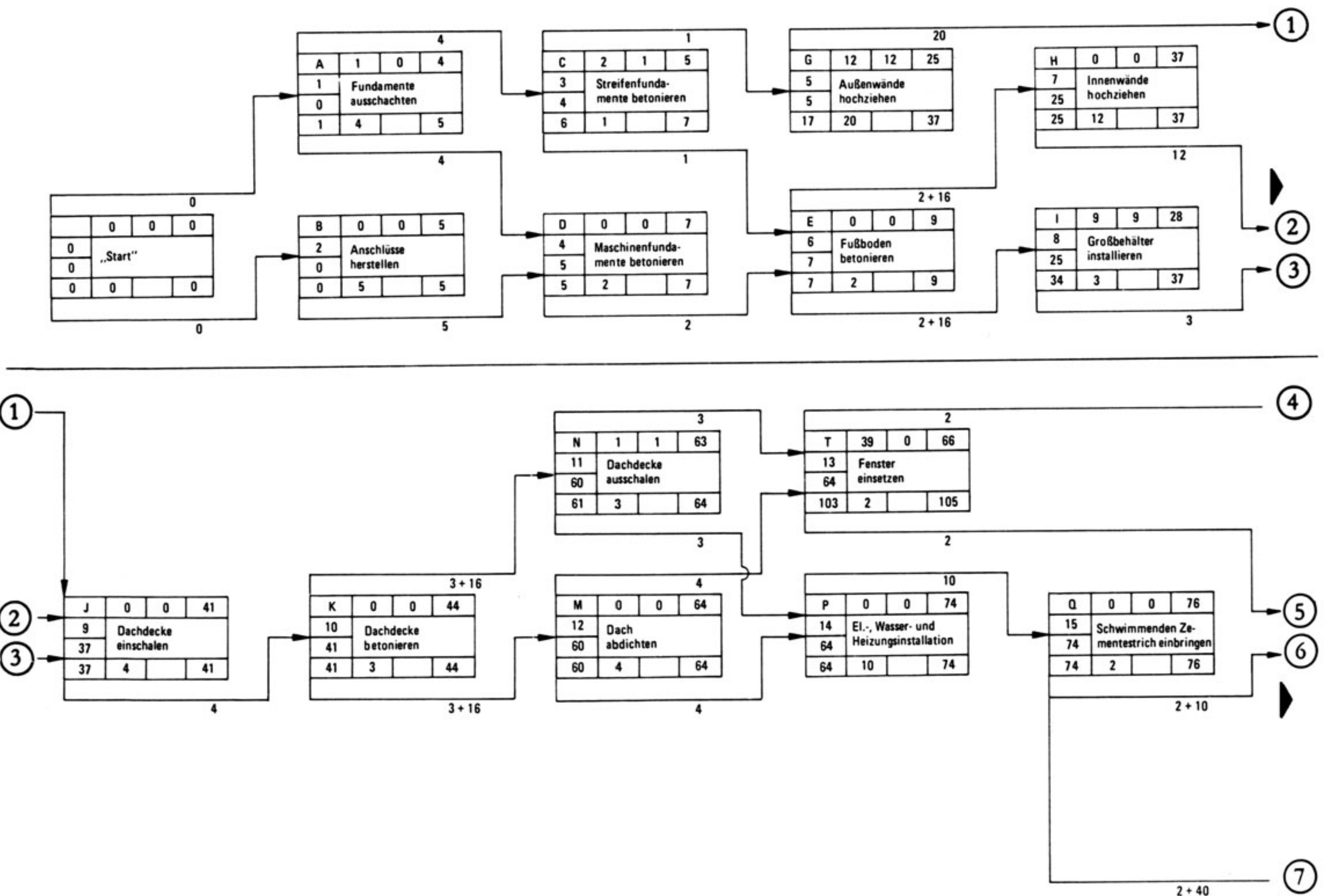


Abb. 28: Zeitplanung des Projektbeispiels nach MPM

Abb. 28: (Forts.) Zeitplanung des Projektbeispiels nach MPM

3. Ermittlung und Interpretation der Pufferzeiten

Eine Erörterung der Pufferzeiten führt zu ähnlichen Betrachtungen wie sie schon im Zusammenhang mit der CPM-Zeitplanung angestellt wurden (vgl. S. 182 ff.). Da für den Zielvorgang „Ende“ des Projektes die Gleichung FA(n) = SA(n) vorgegeben wurde, sind die *kritischen Vorgänge* im Netzplan wie folgt definiert:

$$FE(i) - FA(i) = D(i)$$

bzw.

$$SE(i) - SA(i) = D(i)$$

und

$$FA(i) = SA(i);\ FE(i) = SE(i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Die kritischen Vorgänge sind in ihrer Ausführung streng an Termine gebunden; sie haben keine *Pufferzeiten.*

Bei den *nichtkritischen Vorgängen* steht ein *zeitlicher Spielraum* (Puffer, Pufferzeit, Schlupf) zur Verfügung, d. h. bei diesen Vorgängen liegt der spätestzulässige Anfang später als der frühestmögliche. Welchen Umfang die Pufferzeit annimmt und welche Auswirkungen ihre Nutzung haben kann, wird wiederum an den Arten von Pufferzeiten im MPM-Netzplan gezeigt. In der Praxis haben bei MPM nur zwei Arten von Pufferzeiten Bedeutung erlangt (*Bergen, R., Bubolz, P.,* 1974, S. 89), und zwar:

(1) Gesamte Pufferzeit eines Vorgangs GP(i)

$$GP(i) = SA(i) - FA(i) \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

Die *gesamte Pufferzeit* GP(i) eines Vorgangs i gibt die Zeitspanne an, die für eine Verschiebung oder Ausdehnung des Vorgangs maximal zur Verfügung steht, ohne daß die zeitminimale Projektdauer beeinträchtigt wird (vgl. S. 182 f.).

(2) Freie Pufferzeit eines Vorgangs FP(i)

$$FP(i) = \min \left\{ \begin{array}{l} \min\limits_{j} [FA(j) - a(i,j) - FA(i)]; \\ \min\limits_{l > i} [FA(l) - a(l,i) - FA(i)] \end{array} \right\} \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

Die freie Pufferzeit bedarf zu ihrer Bestimmung einer vergleichenden Rechnung unter Einbeziehung mehrerer Vorgänge und insbesondere unter Beachtung der Pfeile in entgegengesetzter Richtung mit den negativen Potentialen (—a(l,i)). Soll also die freie Pufferzeit bestimmt werden, die zur Ausführung oder Verschiebung eines Vorgangs zur Verfügung steht, und wenn eine Nutzung dieser freien Pufferzeit den frühestmöglichen Anfang der Nachfolger dieses Vorgangs nicht beeinträchtigen darf, dann sind — wie bei CPM — Vergleiche mit dem frühestmöglichen Anfang aller Nachfolger sowie der Potentiale an ihren Verknüpfungen anzustellen. Freie Pufferzeiten können nur bei Vorgängen vorkommen, die vor der Vereinigung von Teilwegen und auf dem zeitlich kürzesten Weg durch den Netzplan liegen. Die freie Pufferzeit entspricht dem Unterschied der Gesamtpufferzeiten der zusammengeführten Wege.

In Abb. 28 (S. 196 f.) sind die „gesamte Pufferzeit" und die „freie Pufferzeit" eines jeden Vorgangs für das obige Projektbeispiel „Bau einer Fabrikationshalle" (vgl. Tab. 86, S. 166) an den vorgesehenen Stellen in den Knoten jeweils angegeben.

D. Übungsbeispiel: Produkt-Neueinführung mit Hilfe eines MPM-Netzplanes

1. Aufgabenstellung

Eine Produkt-Neueinführung erfordert in der Regel eine Vielzahl miteinander verflochtener Aktivitäten (Vorgänge), die im Sinne des Projektablaufs in einer zweckmäßigen Reihenfolge ablaufen müssen. Dabei können die Vorgänge teils nur nacheinander, teils aber auch parallel durchgeführt werden. Die Erfahrung zeigt, daß selbst routinierte Praktiker Schwierigkeiten haben, wenn sie für ein genau definiertes Projekt eine vollständige *Liste der Vorgänge* (einschließlich Verknüpfungen) aufstellen sollen. Für das Projekt der „Einführung eines neuen Produktes im Konsumgüterbereich" sei folgende *Liste der Sammelvorgänge* aufgestellt (in Anlehnung an ein Beispiel von *Haedrich, G.*, 1971, S. 23 ff.):

Tabelle 89: Liste der Sammelvorgänge mit Zuständigkeiten, Abhängigkeiten, Ausführungsdauern

	Vorgang	Zuständigkeit	Ausführungsdauer in Tagen	Abhängigkeit Vorgänger	Zeitabstand MINAA in Tagen
1	Sekundärst. Marktanalyse	U, A	9	–	–
2	Entscheidung für neues Produkt	U	1	1	9
3	Primärstat. Marktanalyse	U, A, M	14	2	1
4	Analyse der Produktionsmöglichkeiten	U	7	2	1
5	Produktforschung	U, A, M	10	4	4
6	Studie über Erweiterung der Produktionsmöglichkeiten	U	5	4	7
7	Analyse der primärstat. Marktanalyse und der Produktforschung	U, A, M	4	3 5	14 10
8	Entwicklung und Herstellung testreifer Produkte	U, A, M	15	7	4
9	Planung einer 1. Testmarktaktion	U, A, M	11	7	4
10	Durchführung und Auswertung eines 1. Tests am Markt	U, A, M	24	8 9	15 11
11	Festlegung der Marketingstrategie	U, A	3	10	24
12	Endgültige Produktentwicklung	U, A, M	4	10	24
13	Vertriebsplanung	U	13	11 12	3 1
14	Personalplanung und -beschaffung	U	18	6 11	5 3



	Vorgang	Zuständigkeit	Ausführungsdauer in Tagen	Abhängigkeit Vorgänger	Zeitabstand MINAA in Tagen
15	Produktionsvorbereitung	U	20	6 11	5 3
16	Auftrag an Werbeagentur	U	1	6 11 12	5 3 4
17	1. Probelauf der Produktionsanlage	U	1	15	20
18	Beschaffungs- und Lagerplanung	U	4	15	20
19	Konzeption der Produktausstattung	A	6	16	1
20	Entwicklung der Werbekonzeption	A	7	16	1
21	Produktion einer Nullserie	U	1	12 14 17	4 14 1
22	Test der Produktaustattung	U, A, M	14	19	6
23	Bereitstellung der Verpackung	U, D	7	22	14
24	Entwicklung einer Konzeption für verkaufsförderndes Material	A	20	16	1
25	Vorbereitung der Gesamt-Markteinführung	U	14	13	13
26	Vorbereitung der Test-Marktführung	U, A, M	14	13	13
27	Normalproduktion für Testmarkteinführung	U	5	18 21 22 23	4 1 14 7
28	Vorbereitung des verkaufsfördernden Materials für Testmarkt	A	5	24	20
29	Test der Werbekonzentration	A, M	9	20	7
30	Ausarbeitung von Werbemethoden	A, M	8	20	7
31	Vorbereitung der Testmarkt-Werbung	A	4	29 30	9 8
32	Vorbereitung des verkaufsfördernden Materials für Gesamtmarkt	A	5	24	20
33	Vorbereitung der Werbung für Gesamtmarkteinführung	A	20	29	9
34	Durchführung der Testmarkt-Einführung	U, A, M	28	26 27 28 31	14 5 5 4
35	Auswertung der Testmarkteinführung und Entscheidung über Gesamt-Markteinführung	U, A, M	4	34	28
36	Gesamt-Markteinführung	U	...	25 32 33 35	14 5 20 4

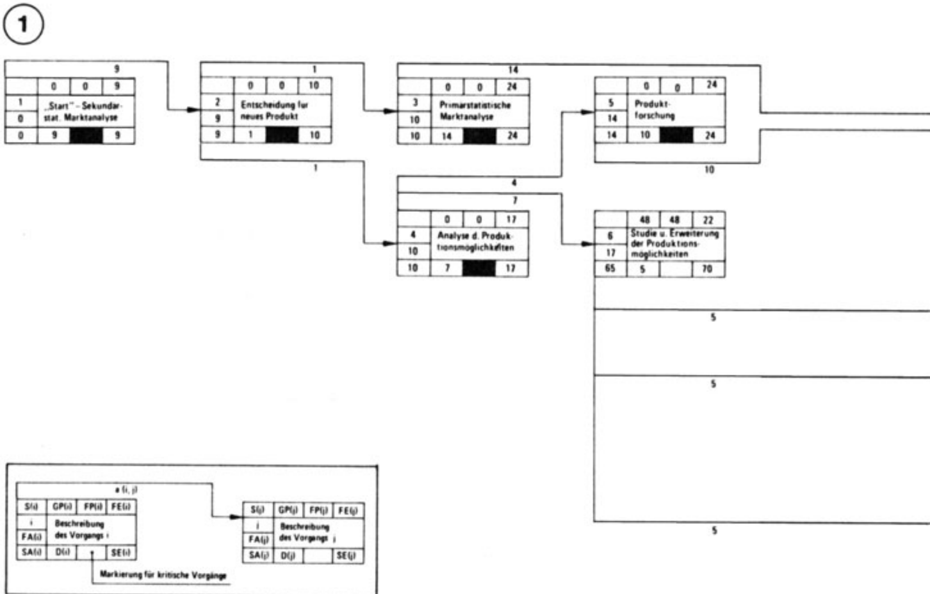
Zeichenerklärung: U = Unternehmen; M = Marktforschungsinstitut; A = Werbeagentur; D = Druckerei

Aufgabe:

Für das vorstehende Projekt ist nach MPM ein Struktur- und Zeitplan aufzustellen. Dabei sind die minimale Projektdauer, der frühestmögliche Anfang, das frühestmögliche Ende, der spätestzulässige Anfang, das spätestzulässige Ende eines jeden Vorgangs zu ermitteln; die Pufferzeiten – GP(i) und FP(i) – sind anzugeben und die kritischen Vorgänge zu kennzeichnen.
Im vorliegenden Beispiel handelt es sich um eine Grobplanung (mit Sammelvorgängen). Jeder Sammelvorgang kann dabei eine Reihe von „Detail"-Vorgängen beinhalten. So umfaßt z. B. der Sammelvorgang Nr. 3: „Primärstatistische Marktanalyse" folgende „Detail"-Vorgänge: „Vorbereitung der Studie", „Angebote von Marktforschungsinstituten einholen", „Angebote auswerten", „Entscheidung über Durchführung der Analyse", „Auftrag an Marktforschungsinstitut", „Durchführung der Untersuchung im Feld".

2. Lösungsvorschlag

MPM-Netzplan (siehe Abb. 29)



Legende

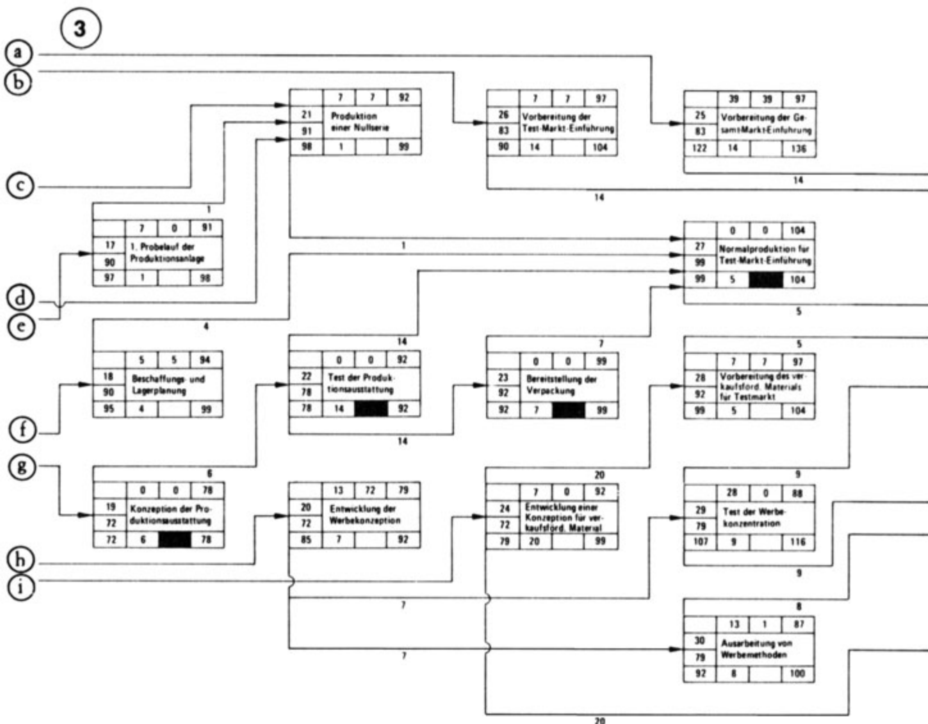
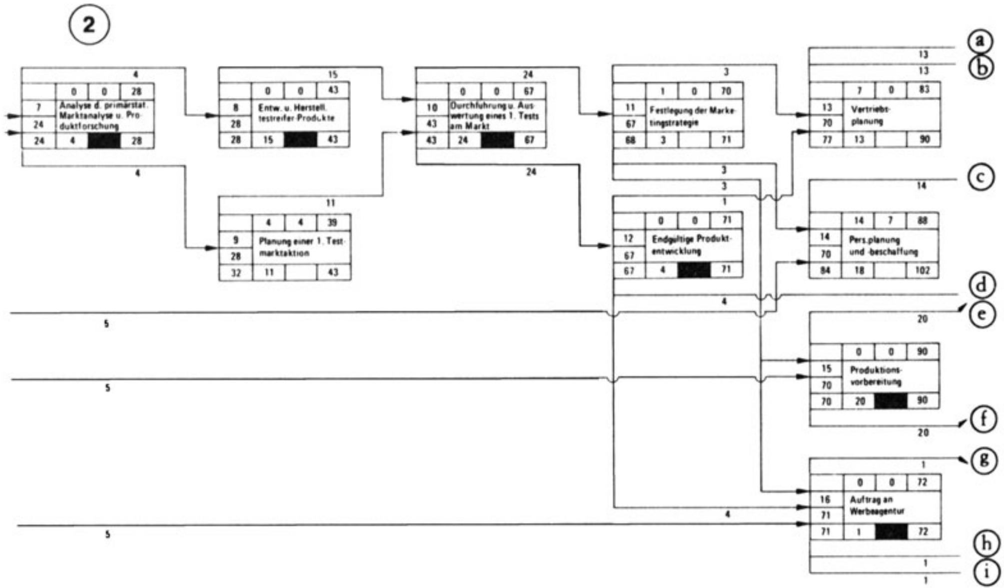


Abb. 29: MPM-Netzplan für das Projekt: Produkt-Neueinführung



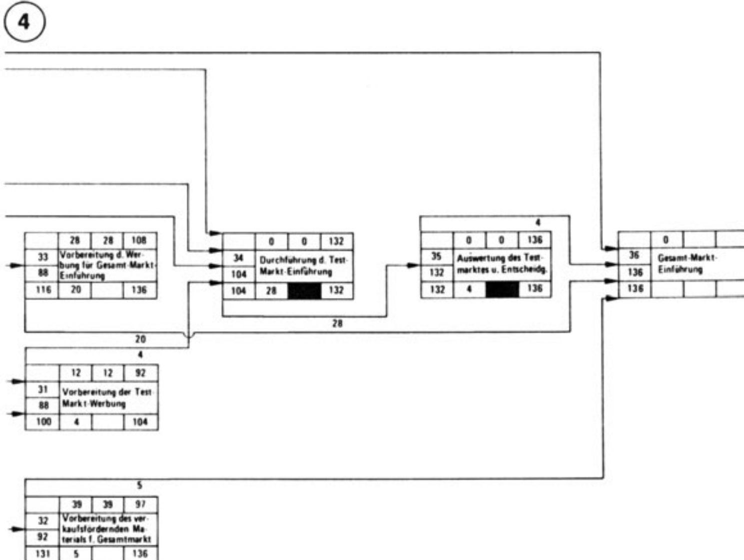


Abb. 29: (Forts.) MPM-Netzplan für das Projekt: Produkt-Neueinführung

V. Zeit-Kosten-Planung

Bisher wurden neben den Grundlagen der NPT nur die Planung der Ablaufstruktur von Projekten und die Zeitplanung behandelt. Für eine betriebswirtschaftlich aussagefähige Projektplanung wäre es notwendig, neben der Zeit auch die entstehenden Kosten und die verfügbaren Kapazitäten der einzusetzenden Produktionsmittel sowie die finanziellen Möglichkeiten und Auswirkungen in die Überlegungen einzubeziehen.

Darüber hinaus ist das Zusammenspiel mehrerer Projekte zu berücksichtigen. In dieser Einführung kann auf dieses Interdependenzproblem nicht im einzelnen eingegangen werden. Zur Illustration dieser Problematik sollen lediglich die *Abhängigkeiten von Zeit und Kosten* (unter Verwendung von CPM) erörtert werden und im übrigen auf die weiterführende Literatur verwiesen werden (vgl. z. B. *Bergen, R., Bubolz, P.*, 1974, S. 237 ff.; *Gewald, K. u. a.*, 1972; *Wasielewski, E. v.*, 1975, S. 138 ff.; *Elsässer, F.*, 1973, S. 86 ff.; *Al-Ani, W.*, 1971, S. 61 ff.; *Trauth, P. J.*, 1970, S. 104 ff., *Schwarze, J.*, 1979, S. 155 ff.; *Stommel, H. J.*, 1976, S. 71 ff.; *Sobotta, K.*, 1978, S. 95 ff.; *Scheer, A. W.*, 1978; *Kompenhans, K.*, 1977, S. 87 ff.; *Altrogge, G.*, 1979, S. 137 ff.; *Weinberg, F. u. a.*, 1981; *Hässig, K.*, 1979, S. 88 ff.; *Reichert, O.*, 1977, S. 47 ff.). Es gibt inzwischen eine Reihe von neuen oder weiterentwickelten Verfahren der NPT, die über die Struktur- und Zeitplanung hinausgehen.

A. Zeitabhängige Vorgangskosten

Da man bei der Planung eines Projektes in aller Regel nicht von einer beliebigen, von der Länge des kritischen Weges abhängigen Projektdauer ausgehen kann, sondern fest vorgegebene Termine einzuhalten hat, muß u.U. versucht werden, die beanspruchte Vorgangsdauer einzelner Vorgänge zu reduzieren. Die *Kürzung der Vorgangsdauer* kann durch *zeitliche* (Überstunden, Zusatzschichten), *quantitative* (zusätzliche Arbeitskräfte, Betriebsmittel), *intensitätsmäßige* (Erhöhung der Prozeßgeschwindigkeit) oder *qualitative* (andere Verfahren) *Anpassung* erfolgen. Diese Anpassung wird *Einfluß* auf die *Höhe der Kosten* haben. Wie hängen die *Vorgangskosten* von der *Vorgangsdauer* ab?

Zentraler Orientierungspunkt für die Zeit-Kosten-Planung ist die sog. *Normaldauer eines Vorgangs* ND(i,j). Sie umfaßt die Zeit, bei der üblicherweise die Kosten des Vorgangs am geringsten sind. Abweichungen von der Normaldauer, wie sie bei Anpassungsmaßnahmen eintreten, führen zu einem Anwachsen der Vorgangskosten. Variiert die Vorgangsdauer nicht (auch nicht annähernd) stetig, so kann es nur einzelne Kostenpunkte für die Beziehung zwischen Vorgangsdauer und Vorgangskosten geben (z.B. Übergang vom Landweg zum Luftweg beim Transport).

Tendenziell wird die Kurve der Vorgangskosten – bei wenigstens näherungsweise stetig variierender Vorgangsdauer – folgenden Verlauf haben:

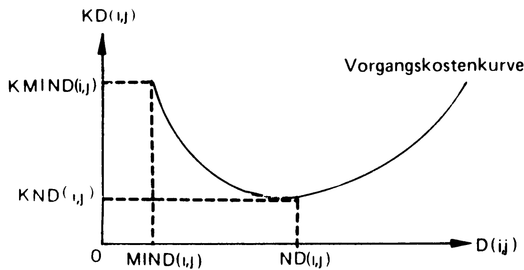


Abb. 30: Vorgangskostenkurve

Die Symbole in Abb. 30 bedeuten:

D(i,j)	:	Dauer des Vorgangs (i,j);
KD(i,j)	:	Kosten des Vorgangs (i,j) in Abhängigkeit von D(i,j);
MIND(i,j)	:	Minimaldauer des Vorgangs (i,j), für die sich auch die Bezeichnung „Zusammenbruchspunkt" (crash-point) findet (*Schwarze, J.*, 1979, S. 162). Die Minimaldauer kann auch bei noch so großem Faktoreinsatz nicht unterschritten werden;
KMIND(i,j)	:	Vorgangskosten bei MIND(i,j);
ND(i,j)	:	Normaldauer des Vorgangs (i,j);
KND(i,j)	:	Vorgangskosten bei ND(i,j) – sie sind minimal.

Der rechts von ND(i,j) aufsteigende Ast der Vorgangskostenkurve ist ineffizient und bleibt außer Betracht. Eine exakte Beschreibung der Vorgangskostenkurve (links von ND(i,j)) wird in praktischen Problemen auf erhebliche Schwierigkeiten stoßen. Für KMIND(i,j) bzw. KND(i,j) sind auch oft nur Schätzwerte bekannt. Man hilft sich hier, indem man die Kostenkurve linear approximiert. Die Vorgangskosten bei Minimaldauer MIND(i,j) und bei Normaldauer ND(i,j) werden durch eine Gerade verbunden:

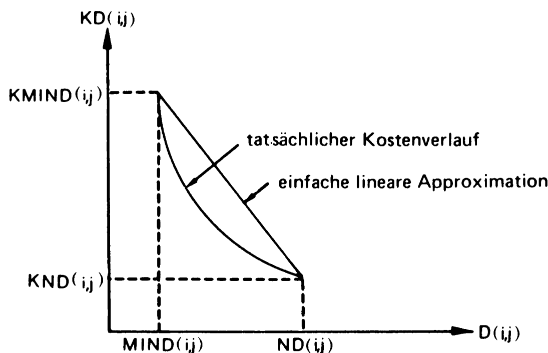


Abb. 31: Lineare Approximation der Vorgangskostenkurve

Es ist auch eine stückweise lineare Approximation möglich:

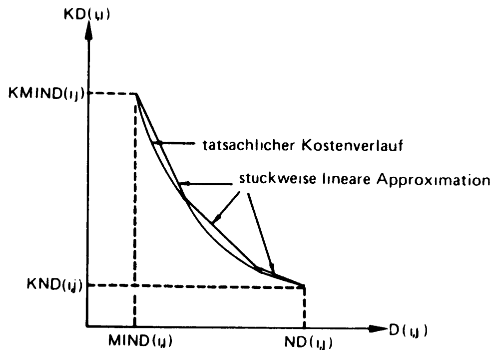


Abb. 32: Stückweise lineare Approximation der Vorgangskostenkurve

Die linearen Kostenfunktionen lauten (für ND(i,j) ≠ MIND(i,j)):

$$KD(i,j) = KND(i,j) + \frac{KMIND(i,j) - KND(i,j)}{ND(i,j) - MIND(i,j)} \cdot ND(i,j) -$$

$$- \frac{KMIND(i,j) - KND(i,j)}{ND(i,j) - MIND(i,j)} \cdot D(i,j)$$

$$= a(i,j) - b(i,j) \cdot D(i,j)$$

$$MIND(i,j) \leqslant D(i,j) \leqslant ND(i,j)$$
$$b(i,j) > 0$$

Ist ND(i,j) = MIND(i,j), so ist KD(i,j) = KND(i,j)

Besonders wichtig ist dabei die Steigungskonstante b(i,j). Sie gibt an, um wieviel sich die Kosten des Vorgangs erhöhen, wenn man die Vorgangsdauer um eine Zeiteinheit verkürzt (*Beschleunigungskosten*).

Nach Ableitung der Vorgangskostenfunktion für einen einzelnen Vorgang können nun auch die *gesamten Vorgangskosten des Projektes* KG definiert werden. Sie ergeben sich durch Summation aller KD(i,j) über alle Vorgänge (i,j) des Netzplans.

Die lineare Approximation hat den Vorteil, daß sich auf diese Weise die Kostenfunktion bei Berechnung von Optimalpunkten relativ leicht handhaben läßt.

Zur Demonstration greifen wir auf Teilprojekt I des Beispiels (vgl. Tabelle 86, S. 166 und Abb. 14, S. 173) zurück. In der Tabelle 90 sind die normale und die minimale Dauer eines jeden Vorgangs und die dazugehörigen Kostenwerte angegeben. In der letzten Spalte ist die jeweilige Vorgangskostenfunktion eingetragen.

Tabelle 90: Vorgangskosten und Vorgangskostenfunktionen des Beispiels (Teilprojekt I)

Vorgang Kurzbezeichnung	(i,j)	ND(i,j) (1)	MIND(i,j) (2)	KND(i,j) (3)	KMIND(i,j) (4)	*Vorgangskostenfunktion* KD(i,j) = a(i,j) − b(i,j) · D(i,j) $(5) = (3) + \frac{(4)-(3)}{(1)-(2)} \cdot (1) - \frac{(4)-(3)}{(1)-(2)} \cdot D(i,j)$
A	(1,2)	4	1	2	4	KD (1,2) = 4,67 − 0,67 D(1,2)
B	(1,3)	5	2	3	5	KD (1,3) = 6,33 − 0,67 D(1,3)
C	(2,4)	1	1	1	1	KD (2,4) = 1 − 0 D(2,4)
D	(3,5)	2	1	1	2	KD (3,5) = 3 − 1 D(3,5)
E	(5,6)	2	1	2	3	KD (5,6) = 4 − 1 D(5,6)
F	(6,7)	16	12	0	2	KD (6,7) = 8 − 0,5 D(6,7)
G	(4,8)	20	16	10	12	KD (4,8) = 20 − 0,5 D(4,8)
H	(7,9)	12	6	12	15	KD (7,9) = 18 − 0,5 D(7,9)
I	(7,8)	3	2	1	2	KD (7,8) = 4 − 1 D(7,8)
J	(9,10)	4	2	4	5	KD (9,10) = 6 − 0,5 D(9,10)
K	(10,11)	3	2	3	4	KD (10,11) = 6 − 1 D(10,11)
L	(11,12)	16	12	0	2	KD (11,12) = 8 − 0,5 D(11,12)
M	(12,13)	4	2	3	5	KD (12,13) = 7 − 1 D(12,13)
N	(12,14)	3	1	1	3	KD (12,14) = 4 − 1 D(12,14)
				Σ 43		

Auf die besonderen Schwierigkeiten bei der Ermittlung der Abhängigkeit der Vorgangskosten von der Vorgangsdauer, die sich daraus ergeben, daß man in der Praxis die dazu notwendigen Informationen nicht immer beschaffen kann, sei hier lediglich hingewiesen (vgl. *Schwarze, J.*, 1979, S. 161 ff.). Es dürfte nur selten vorkommen, daß die Kostenrechnung der Betriebe so tief gegliedert ist wie der Projektablauf im Netzplan, so daß man sich bei der Zeit-Kosten-Ermittlung in der Mehrzahl der Fälle mit Schätzungen und Expertenbefragungen begnügen muß.

B. Bestimmung der vorgangskostenminimalen Projektrealisierung bei gegebener Projektdauer

In der Regel wird man anstreben, eine *fest vorgegebene Projektdauer* mit *minimalen Kosten* zu realisieren. Die Vorgangsdauern der einzelnen Vorgänge sind so einzurichten, daß die gesamten Vorgangskosten KG ein Minimum werden. Es müssen also die *Vorgangsdauern so verkürzt* werden, daß der dadurch hervorgerufene *Kostenanstieg* am *kleinsten ist*. Bei unserem Beispiel (Tabelle 90) ist der Kostenanstieg durch eine Verringerung der Vorgangsdauer z.B. bei Vorgang (6,7) geringer als bei Vorgang (5,6). Eine Verringerung der Projektdauer wird man also so vornehmen, daß man zunächst den *kritischen Vorgang* mit dem *kleinsten Kostenanstieg je Zeiteinheit* verkürzt.

Im Teilprojekt I des Beispiels erhält man eine Projektdauer T von 64 Tagen bei minimalen Kosten KG in Höhe von 43 GE (Geldeinheiten), wenn jeder Vorgang in der normalen Dauer ND(i,j) ausgeführt wird. Soll die Projektdauer T verkürzt werden, so verringert man dazu zunächst die kritischen Vorgänge (6,7), (7,9), (9,10) oder (11,12). Alle diese Vorgänge sind *kritisch* und haben die gleiche *Kostensteigerungskonstante* b(i,j) = 0,5, d. h. 0,5 GE/Tag. Da durch die Verkürzung der Vorgänge (9,10) und (11,12) kein anderer Vorgang kritisch werden kann (vgl. Netzplan Abb. 17, S. 180), ist es zweckmäßig, diese zunächst zu verkürzen: Vorgang (9,10) auf 2 Tage und Vorgang (11,12) auf 12 Tage. Die Kosten betragen dann 43 + 1 = 44 bzw. 44 + 2 = 46 GE. Als nächstes sind die Vorgänge (6,7) oder (7,9) zu verkürzen. Beginnt man mit Vorgang (6,7), so ergibt sich aus dem Netzplan (Abb. 17), daß eine Verkürzung um 4 Tage möglich ist. Die Projektdauer beträgt jetzt 54 Tage mit Kosten von 48 GE. Vorgang (7,9) kann um 6 Tage auf 6 Tage verkürzt werden, ohne daß ein anderer Vorgang kritisch wird. Die Kostensteigerung dieser Verkürzung beträgt 3 GE. Als nächstes kann die Dauer des Vorgangs (1,3) um einen Tag (anstatt 3 Tage gem. Tabelle 90) mit einer Kostenzunahme von 0,67 GE verkürzt werden. Durch eine Reduzierung der Vorgangsdauer D (1,3) auf 4 Tage wird nämlich der bisher nichtkritische Vorgang (1,2) kritisch (vgl. Netzplan Abb. 17). Um eine weitere Verkürzung der Dauer von Vorgang (1,3) zu erreichen, müßte die Dauer des Vorgangs (1,2) gleichzeitig mitgekürzt werden; die Beschleunigungskosten würden sich entsprechend addieren. Dann lassen sich die kritischen Vorgänge (3,5), (5,6), (10,11) bzw. (12,13) verkürzen, und zwar mit jeweils einer Kostensteigerung von einer GE/Tag. Während die Vorgangsdauer D (10,11) ohne weiteres um einen Tag verkürzt werden kann, läßt sich D (12,13) nicht um 2, sondern nur um einen Tag verkürzen, da bereits bei D (12,13) = 3 der Vorgang (12,14) kritisch wird (vgl. Netzplan Abb. 17, S. 180). Ebenso kann nur D (3,5) *oder* D (5,6) um einen Tag verkürzt werden, da bei einer Verkürzung um einen Tag der Teilweg mit den Vorgängen (2,4), (4,8) und (8,9) kritisch wird. Wir wollen zunächst D (3,5) um einen Tag reduzieren.

Weitere Verkürzungen sind nur noch möglich, indem zwei Vorgänge in ihren Ausführungszeiten zugleich gekürzt werden. Es sind diejenigen Vorgangspaare zunächst auszuwählen, die zusammen die kleinste Kostensteigerung je Tag verursachen. Im Beispiel sind dies die Vorgänge (1,2) *und* (1,3) mit einer Kostensteigerung von (0,67 GE + 0,67 GE)/Tag. Sie können um zwei Tage verkürzt werden, da Vorgang (1,3) bereits um 1 Tag verkürzt wurde. Dann kann D(5,6) zusammen mit D(4,8) um einen Tag reduziert werden.

Als letztes lassen sich noch die Vorgangsdauern D (12,13) und D (12,14) um einen Tag mit einer Kostenzunahme von (1 GE + 1 GE)/Tag verkürzen (vgl. Abb. 33).

So läßt sich *schrittweise* die *Projektdauer minimieren* (im Beispiel läßt sich die Projektdauer für Teilprojekt I auf T = 40 Tage verkürzen mit Gesamtkosten KG = 60,9 GE).

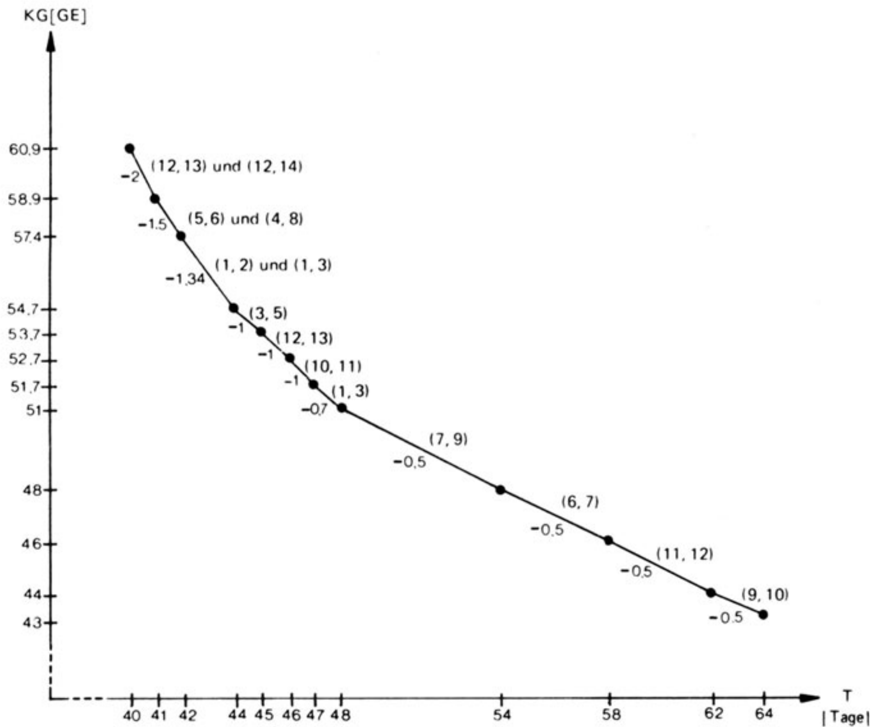


Abb. 33: Abhängigkeit der Vorgangskosten von der Projektdauer (Teilprojekt I des Beispiels) – Minimalkostenkurve für die gesamten Vorgangskosten bei vorgegebenen Projektdauern

In Abb. 33 können die minimalen Vorgangskosten des Teilprojekts I für alternativ vorgegebene Projektdauern abgelesen werden. An den Abschnitten dieser Kurve sind unterhalb jeweils die Steigung und oberhalb die Vorgänge vermerkt, durch deren Zeitreduktion jeweils die Projektdauerveränderung erreicht wird.

C. Bestimmung der kostenminimalen Projektdauer für einen gegebenen Netzplan

Bisher wurden die Vorgangskosten eines Projektes, d.h. die den Vorgängen zurechenbaren Kosten behandelt. Bezieht man die „übrigen" Projektkosten (Einzel- und Gemeinkosten des *gesamten* Projekts und nicht einzelner Vorgänge) in die Überlegungen ein, so läßt sich eine ***kostenminimale Projektdauer*** bestimmen, wenn sich unter diesen „übrigen" Projektkosten fixe Kosten, d.h. *zeitproportionale Kosten* befinden. Voraussetzung ist natürlich, daß die notwendigen Informationen über diese Kosten vorliegen.
Nehmen wir in unserem Beispiel für Teilprojekt I an, daß diese „übrigen" Kosten KP, die nur dem Projekt zurechenbar sind, folgender Funktion

$$KP = 40 + 1{,}1\ T \quad (T = \text{Projektzeit in Tagen})$$

folgen, so setzen sich die Gesamtkosten K des Projekts aus den gesamten Vorgangskosten KG und den „übrigen" Kosten des Projektes KP zusammen:

$$K = KG + KP$$

Für die einzelnen Projektdauern T lassen sich die Gesamtkosten K leicht errechnen:

Tabelle 91: Gesamtkosten des Teilprojekts I in Abhängigkeit von der Projektdauer

Projekt-dauer T [Tage]	KG [GE] vgl. Abb. 21 (1)	KP = 40 + 1,1 · T (2)	K (3) = (1)+(2)
40	60,9	84,0	144,9
41	58,9	85,1	144,0
42	57,4	86,2	143,6
43	56,0	87,3	143,3
44	54,7	88,4	143,1 = K_{min} !
45	53,7	89,5	143,2
46	52,7	90,6	143,3
47	51,7	91,7	143,4
48	51,0	92,8	143,8
⋮	⋮	⋮	⋮
54	48,0	99,4	147,4
⋮	⋮	⋮	⋮
58	46,0	103,8	149,8
⋮	⋮	⋮	⋮
62	44,0	108,2	152,2
⋮	⋮	⋮	⋮
64	43,0	110,4	153,4

Aus Tabelle 91 ergibt sich, daß – unter den genannten Annahmen – die kostenminimale Projektdauer des Teilprojekts I bei T = 44 Tagen mit K = 143,1 GE liegt. Für die einzelnen Vorgänge ergeben sich folgende Vorgangszeiten für die *gesamtkostenminimale Projektdauer* des Teilprojekts I:

Tabelle 92: Vorgangszeiten bei kostenminimaler Projektdurchführung

Vorgang	Gesamtkostenminimale Vorgangszeiten der Vorgänge (i,j)	
(1,2)	4 Tage	kritisch
(1,3)	4 Tage	kritisch
(2,4)	1 Tag	kritisch
(3,5)	1 Tag	kritisch
(5,6)	2 Tage	kritisch
(6,7)	12 Tage	kritisch
(4,8)	20 Tage	kritisch
(7,9)	6 Tage	kritisch
(7,8)	3 Tage	nicht kritisch
(9,10)	2 Tage	kritisch
(10,11)	2 Tage	kritisch
(11,12)	12 Tage	kritisch
(12,13)	3 Tage	kritisch
(12,14)	3 Tage	kritisch

Bei der Bestimmung der kostenminimalen Projektdurchführungsdauer nach der beschriebenen Methode ist der Netzplan ständig den neuen Gegebenheiten anzupassen (Iterationsverfahren). Wegen weiterer Optimierungsalgorithmen wird auf die weiterführende Literatur verwiesen (z. B. *Bergen, R.*, *Bubolz, P.*, 1974, S. 181 ff.; *Gewald, K.* u. a., 1972; *Reichert, O.*, 1977, S. 113 ff.).

VI. Verarbeitung von Netzplänen mit EDV

Die EDV ist ein vorzügliches Hilfsmittel für eine schnelle Auswertung großer Datenmengen und für eine häufige Wiederholung gleicher Rechenoperationen. Aus diesem Grund bietet die EDV für ihren Einsatz in der NPT erhebliche Vorteile. Seitdem die EDV zum Erstellen, Verarbeiten und Auswerten von Netzplänen eingesetzt wird, erfährt die NPT eine immer stärkere Verbreitung (*Reichert, O.*, 1977, S. 75). Der Prozeß der Entwicklung der Datenverarbeitung (einschließlich der Datenfernverarbeitung) hat schnelle Zugriffsmöglichkeiten zur Datenverarbeitungsanlage – auch von fern – in erheblichem Umfang ermöglicht. Die dritte Generation der EDV-Anlagen mit ihren

- sehr kurzen internen Verarbeitungszeiten,
- leistungsfähigen Programmunterbrechungssystemen,
- erheblichen Arbeitsspeicherkapazitäten,
- Einsatzmöglichkeiten von Massenspeichern mit direktem Zugriff als periphere Großspeicher

ermöglicht den Einsatz komfortabler Betriebssysteme und entsprechender Programmierhilfen.

Zur Lösung von Projekt-Planungsaufgaben mit Hilfe der NPT bieten sich für den Einsatz der EDV folgende Möglichkeiten an:

(1) dem Unternehmen selbst steht eine EDV-Anlage zur Verfügung;

(2) eine Service-Firma führt die Aufgabe aus;

(3) ein Rechenzentrum wird über das Time-Sharing-System benutzt.

Steht dem Unternehmen selbst eine EDV-Anlage zur Verfügung, so kann es ein eigenes Netzplanprogramm entwickeln oder ein Lizenzprogramm benutzen.

Das Time-Sharing-System bietet in Form der Datenfernverarbeitung nicht zuletzt auch kleineren und mittelgroßen Unternehmen die Möglichkeit, die Leistungsfähigkeit von Großrechnern (relativ preiswert) in Anspruch zu nehmen. *O. Reichert* hat die Verarbeitung eines Netzplanes im Time-Sharing-System an einem Beispiel erläutert und die neueren EDV-Programme zur Erstellung, Berechnung und Auswertung von Netzplänen vergleichend dargestellt (*Reichert, O.*, 1977, S. 95 ff. bzw. S. 113 ff.).

Bei einer integrierten Netzplanung (Zeit-Kosten-Kapazitätsplanung) sind sehr viele Daten zu verarbeiten. Eine manuelle Berechnung (ohne EDV-Unterstützung) ist in solchen Fällen nur für relativ kleine Netzpläne wirtschaftlich durchführbar.

VII. Beurteilung der Anwendungsmöglichkeiten der NPT

Es bestehen heute kaum noch Zweifel an der hervorragenden Eignung der NPT zur Lösung von Planungsproblemen bei Projekten. Mit keiner anderen Methode ist es möglich, ein Projekt mit nahezu beliebigem Detaillierungsgrad graphisch darzustellen und seinen Ablauf zu planen und zu kontrollieren. Als Nachteile oder Mängel der NPT – die z.T. auch andere Planungstechniken aufweisen – sind zu nennen:

(1) Die Minimierung der Projektdauer sowie die Zeit-Kosten-Kapazitätsplanung beziehen sich auf einen gegebenen Netzplan. Der Projektablauf ist aber – wie oben erörtert – in vielen Fällen mehrdeutig.

(2) Der Planungsaufwand ist gegenüber herkömmlichen Verfahren größer.

Die NPT ist ein Verfahren zur Verarbeitung und Aufbereitung von Informationen. Sind diese Informationen ungenau oder unvollständig, dann müssen es auch die Ergebnisse der NPT sein.

Übungsfragen zum 3. Kapitel

1. Was versteht man unter Netzplantechnik (NPT) und welche Planungs- und Kontrollaufgaben können mit ihr wahrgenommen werden?
2. Welche Voraussetzungen hat ein Projekt zu erfüllen, damit es mit Hilfe der NPT geplant und seine Abwicklung gesteuert und überwacht werden kann?
3. Worin liegen die Vorteile der NPT im Vergleich zu anderen Planungs- und Kontrollverfahren und worin ihre Probleme?
4. Wie lassen sich die einzelnen Schritte der Strukturanalyse eines Projektes beschreiben?
5. Welche Formen der Netzplantechnik unterscheidet man und worin liegen deren Unterschiede?
6. Welche Verfahren der Numerierung von Knoten in CPM-Netzplänen gibt es und worin liegen deren Vor- und Nachteile?
7. Welche Ziele verfolgt die Zeit- oder Terminplanung von Projekten mit NPT?
8. Was versteht man unter Zeitanalyse bei der NPT und welche Probleme treten dabei auf?
9. Wie läßt sich die Zeitplanung mit CPM beschreiben?
10. Wie läßt sich die Zeitplanung mit Vorgangsknotennetzen beschreiben?
11. Wodurch ist ein MPM-Netzplan gekennzeichnet?
12. Welche Pufferzeiten unterscheidet man? Wie lassen sie sich ermitteln und interpretieren?
13. Wie läßt sich die Zeit-Kosten-Planung eines Projektes mit NPT durchführen? Welche Analysen hat sie zur Voraussetzung?
14. Was sind zeitabhängige Vorgangskosten und wie lassen sie sich ermitteln?
15. Wie läßt sich die vorgangskostenminimale Projektrealisierung bei gegebener Projektdauer mit Hilfe der NPT bestimmen?
16. Wie läßt sich die kostenminimale Projektdauer für einen gegebenen Netzplan bestimmen?
17. Wie ist die Anwendungsmöglichkeit und die Leistungsfähigkeit der NPT als Planungs- und Kontrollmethode in der Betriebswirtschaft zu beurteilen?

Literatur zum 3. Kapitel

Grundlagen der NPT – Allgemeine Überblicke

Falkenhausen, H. v.: Prinzipien und Rechenverfahren der Netzplantechnik, 2. A., Kiel 1968.

Becker, A. M.: Handbuch der dynamischen Netzplantechnik, Winterthur 1969.

Jacob, H. (Hrsg.): Anwendung der Netzplantechnik im Betrieb, Wiesbaden 1969.

Kern, W.: Die Netzplantechnik als ein Instrument betrieblicher Ablaufplanung, Wiesbaden 1969.

Thumb, N.: Grundlagen und Praxis der Netzplantechnik, 2. A., München 1969 – Grundlagen –.

Behnke, H.: Netzplantechnik und operative Planung in der Industrie, München 1970.

Moder, J. J., Phillips, C. R.: Project Management With CPM and PERT, 2. A., New York 1970 – Grundlagen –.

Waschek, G.: Einheitliche Bezeichnungen in der Netzplantechnik, in: Ablauf- und Planungsforschung 1970, S. 205 ff. – Terminologie –.

Wille, H. u.a.: Netzplantechnik, Band 1: Zeitplanung, 3. A., München–Wien 1972.

Berg, R. u.a.: Netzplantechnik, Zürich 1973.

Schwarze, J.: Übungen zur Netzplantechnik, Herne–Berlin 1973.

Elsässer, F.: Einführung in die Netzplantechnik, München 1973.

Bergen, R., Bubolz, P.: Netzplantechnik, Frankfurt/M. 1974.

Rollny, H.: Netzplantechnik von A–Z, Lexikon, Frankfurt 1974.

Werner, M.: Zweistufige stochastische Zeit-Kosten-Planung und Netzplantechnik, Frankfurt/M. 1974.

Johnson, K. C.: Grundlagen der Netzplantechnik, Düsseldorf 1974.

Heigenbauser, B., Schub, A.: Grundlagen der Netzplantechnik, Essen 1975.

Küpper, W., Lüder, K., Streitferdt, L.: Netzplantechnik, Würzburg-Wien 1975.

Neumann, K.: Operations Research Verfahren, Band III Graphentheorie und Netzplantechnik, München 1975 – Grundlagen –.
Wasielewski, E. v.: Praktische Netzplantechnik mit Vorgangsknotennetzen, Wiesbaden 1975 – Grundlagen mit Übungen –.
Stommel, H. J.: Betriebliche Terminplanung, Berlin und New York 1976.
Heigenhauser, B.: Netzplantechnik, Würzburg 1976 – Einführung –.
Kompenhans, K.: Netzplantechnik und Transplantechnik, Anwendung im Betrieb, Köln und Offenbach 1977.
Reichert, O.: Integrierte Netzplantechnik, Weinheim-New York 1977 – Grundlagen mit Übungen –.
Scheer, A. W.: Projektsteuerung, Wiesbaden 1978.
Sobotta, K.: Planung und Überwachung von Projekten (Netzplantechnik), Heidelberg 1978.
Altrogge, G.: Netzplantechnik, Wiesbaden 1979 – Grundlagen –.
Hässig, K.: Graphentheoretische Methoden des Operations Research, Stuttgart 1979 – Grundlagen –.
Schwarze, J.: Netzplantechnik, 4. A., Herne-Berlin 1979 – Einführung für Praktiker –.
Weinberg, F. u. a.: Optimierungsprobleme bei Netzwerken. Grundlagen der Graphentheorie – Modelle und Methoden zur Netzwerkflußoptimierung – Praktische Anwendung in vier Fallstudien, Bern-Stuttgart 1981.

Spezielle Anwendungen der NPT

Spickhoff, F.: Anwendung der Netzplantechnik bei der langfristigen Finanzplanung, in: ZfB 1966, S. 592–604.
Dusenberg, W.: CPM for New Product Introductions, in: Business Review 1967, S. 124–139 – Produkteinführungsplanung –.
Jurecka, W.: Netzwerkplanung im Baubetrieb, Wiesbaden–Berlin 1967.
Carre, D.: Netzplantechnik für Instandhaltungsarbeiten in einer Raffinerie, in: *Roy, B.:* Ablaufplanung, Anwendungen und Methoden, München-Wien 1968, S. 97–122.
Disch, W.K.A.: Netzplantechnik im Marketing, Hamburg 1968.
Wagner, G.: Netzplantechnik in der Fertigung, München 1968.
Schelle, H.: Kosten- und Finanzplanung mit Methoden der Netzplantechnik, in: *Jacob, H.* (Hrsg.): Anwendung der Netzplantechnik im Betrieb, Wiesbaden 1969.
Trauth, P. J.: Netzplantechnik – CPM – und ihre Anwendung im Marketingbereich, Nürnberg 1970.
Böhm, F. u. a.: Eine Anwendung des Projekt-Management-Systems im Industrieanlagenbau, in: IBM-Nachrichten 1971, S. 931–938.
Haedrich, G.: So bleiben Flobs im Netz hängen, in: Absatzwirtschaft, Heft 20, Düsseldorf 1971, S. 23 ff.
Engel, P., Riedmann, W.: Die neuen Managementtechniken in Fällen, Band 1, München 1971, S. 63 ff. – Fallstudien –.
Nagtegaal, H.: Grundlagen des Marketing: Ein Handbuch für Marketingfachleute mit zahlreichen Aufgaben und Fallstudien, Wiesbaden 1972, S. 253 ff. – Produktentwicklung und -einführung mit Hilfe der Netzplantechnik –.
Gewald, K. u. a.: Netzplantechnik, Band 2: Kapazitätsoptimierung, München-Wien 1972.
Hastings, N. A. J.: On Resource Allocation in Project Networks, in: Operational Research Quarterly 1972, S. 217 ff. – Einsatzmittelplanung –.
Ohmstedt, H.: Netzplantechnik bei Emissionsgeschäften, Stuttgart 1974.
Kompenhans, K.: Kostenplanung mittels Netzplantechnik und Transplantechnik, in: DBw 1975, II, S. 103–107.
Kompenhans, K.: Die Kapazitätsplanung mittels Netzplantechnik, in: DBw 1976, S. 1–3.
Häger, W., Tschiersch, H.-G.: Hamburger Methode der Netzplantechnik, Blohm & Voss, Technische Berichte 1., Hamburg 1976.

Adam, D., Wellensiek, H.-K.: Kapitalbedarfsrechnung bei Einführung eines neuen Produktes, in: Jacob, H. (Hg.): Betriebswirtschaftliche Fallstudien mit Lösungen, Wiesbaden 1976, S. 255 ff. – Anwendung der Netzplantechnik auf eine reale Produkteinführung –.

Selowsky, R.: Finanzplanung, in: Ergänzungsheft 1–79 ZfB, Wiesbaden 1979, S. 125–143 – Anwendung der Netzplantechnik als Mittel der Koordination der unternehmerischen Teilpläne –.

Sonstige Literatur zum 3. Kapitel

Schröder, H. J.: Project Management, Wiesbaden 1970.

Al-Ani, A.: Praxis der Projektplanung mit der Netzplantechnik, Köln-Marienburg 1971.

Dathe, H. M.: Moderne Projektplanung in Technik und Wissenschaft, München 1971.

Zimmermann, H.-J.: Netzplantechnik, Berlin 1971.

Häger, W., Waschek, G.: Einheitliche Bezeichnungen in der Netzplantechnik, in: Zeitschrift für Operations Research 1972, S. B 1 ff.

Wegner, F.E.H.: Projektzeitplanung bei Unsicherheit (Diss.), Regensburg 1972.

Müller-Merbach, H.: Operations Research, Methoden und Modelle der Optimalplanung, 3. A., München 1973.

Scheibler, A.: Betriebswirtschaftliche Entscheidungen in Theorie und Praxis, Wiesbaden 1974.

Kompenhans, K.: Netzplantechnik und Transplantechnik als moderne Planungsinstrumente, in: DBw 1975, I, S. 29–32.

Gaede, K.-W., Heinhold, J.: Grundzüge des Operations Research Teil 1, München und Wien 1976.

Zimmermann, W.: Planungsrechnung und Entscheidungstechnik: Operations-Research-Verfahren, Braunschweig 1977, S. 247 ff.

Weisser, J.: Probleme lösen – Entscheidungen vorbereiten, 2. A., Heidelberg-Hamburg 1979, S. 128 ff.

Korndörfer, W.: Unternehmensführungslehre, 3. A., Wiesbaden 1983, S. 103 ff.

Verzeichnis der Abbildungen

Verzeichnis der Tabellen

Stichwortverzeichnis